
AUTOUR DES ALGÈBRES DE TITS

par

Anne Quéguiner-Mathieu

Table des matières

1. Introduction.....	1
2. Involution canonique de certaines algèbres de Tits....	3
3. Décomposabilité des algèbres à involution.....	12
4. Involutions de Pfister.....	17
5. Partie centrale de l'invariant de Rost.....	26
Références.....	30

1. Introduction

L'étude systématique des algèbres centrales simples à involution, c'est-à-dire des 'formes' d'algèbres de matrices a débuté essentiellement dans les années 30, avec les travaux d'Albert, qui puisait ses motivations dans la théorie des surfaces de Riemann. Ce sujet a connu un nouvel essor après que Weil [Wei60], en 1960, ait démontré l'existence d'un lien fort avec les groupes algébriques: toute forme d'un groupe classique, en effet, est le groupe des automorphismes d'une algèbre centrale simple à involution. Quelques années plus tard, en étudiant les représentations des groupes algébriques semi-simples sur un corps arbitraire, Tits [Tit71] a montré comment associer à un tel groupe G des algèbres centrales simples A_λ , qu'on appelle les algèbres de Tits de G , ainsi que des morphismes

$G \rightarrow \mathrm{GL}_1(A_\lambda)$ qui sont des descentes de certaines représentations irréductibles (voir §2.1 ci-dessous). Le passage d’une théorie à l’autre que ces résultats permettent est à la base de progrès importants, aussi bien pour les groupes algébriques que pour les algèbres à involution.

Citons, à titre d’exemple, la démonstration de la conjecture II de Serre pour les groupes classiques, donnée par Bayer-Fluckiger et Parimala [BFP95]. Selon cette conjecture, l’ensemble de cohomologie galoisienne $H^1(k, G)$ est nul pour tout groupe semi-simple simplement connexe si le corps k est parfait de dimension cohomologique au plus 2. La démonstration de cette conjecture repose notamment sur la correspondance de Weil, c’est-à-dire la réalisation de chaque groupe classique comme groupe d’automorphismes d’une algèbre à involution. Ceci permet aux auteures de ramener la conjecture à des questions de classifications d’algèbres à involution sur un corps de dimension cohomologique ≤ 2 . Les théorèmes de classification nécessaires sont enfin démontrés à l’aide d’une suite exacte due à Parimala, Sridharan et Suresh.

Un autre exemple intéressant est celui des formules de réduction d’indice. L’indice d’une algèbre centrale simple est le degré de l’algèbre à division sous-jacente. C’est un invariant intéressant, dont le comportement par extension des scalaires est a priori difficile à contrôler. En 1992, Schofield et Van den Bergh [SVdB92] ont introduit une nouvelle méthode pour étudier cette question. En utilisant les calculs de Quillen du groupe K_0 d’une variété de Séveri-Brauer, ils ont montré comment calculer l’indice d’une algèbre centrale simple après extension des scalaires au corps de fonctions de cette variété. Il s’agit en réalité d’un cas particulier d’une variété de sous-groupes paraboliques d’un groupe algébrique semi-simple, et c’est dans ce contexte que Merkurjev, Panin et Wadsworth [MPW98] ont prouvé une formule de réduction d’indice qui généralise aussi bien celle de Schofield et Van den Bergh que les autres formules analogues démontrées dans l’intervalle par différents auteurs. Ces formules utilisent, de manière cruciale, les algèbres de Tits du groupe algébrique G .

Ces différents liens entre groupes algébriques et algèbres à involution vont intervenir de façon récurrente tout au long de ce texte. C’est dans ce contexte, en effet, que se situent les travaux que je vais présenter ici.

Bien qu'une partie des résultats soit valable en caractéristique quelconque, nous supposons pour simplifier que le corps de base F est de caractéristique différente de 2, sauf au paragraphe 5. Les algèbres considérées sont toutes supposées de dimension finie sur leur centre. Quand une telle algèbre est munie d'une involution, le corps F désigne généralement le sous-corps du centre fixé par l'involution. Ainsi, si l'involution est de type orthogonal ou symplectique, le centre de A est F ; si elle est de type unitaire, en revanche, le centre de A est une extension quadratique de F , généralement notée K .

2. Involution canonique de certaines algèbres de Tits

Dans cette partie, nous présentons certains résultats de [QMT02] et [GQMT01]. Rappelons tout d'abord le contexte général.

2.1. Algèbres de Tits. — (Voir l'article de Tits [Tit71].) Soit G un groupe algébrique semi-simple simplement connexe sur le corps F . Si G est déployé, les représentations irréductibles de G sont en correspondance bijective avec le cône des poids dominants. Dans le cas général, on peut toujours déployer G en étendant les scalaires à une clôture séparable F_s de F . Les représentations irréductibles $\rho_s : G_s \rightarrow GL(V_s)$ n'admettent généralement pas de descente au corps F . Cependant, si le poids dominant de ρ_s est invariant sous la $\star$ -action du groupe de Galois absolu $\text{Gal}(F_s/F)$, il existe une *représentation en algèbre*, i.e. un morphisme défini sur F , $\rho : G \rightarrow GL_1(C)$, où C est une algèbre centrale simple sur F , qui est une descente de ρ_s . Précisément, cela signifie qu'il existe un isomorphisme d'algèbres $C \otimes_F F_s \simeq \text{End}_{F_s}(V_s)$ tel que l'application induite par ρ par extension des scalaires $G_s \rightarrow GL_1(C \otimes_F F_s) \simeq GL(V_s)$ coïncide avec ρ_s . On dit alors que C est une algèbre de Tits du groupe algébrique G .

Exemple 2.1. — Soit A une F -algèbre centrale simple. Après extension des scalaires à F_s , l'algèbre est déployée, c'est-à-dire isomorphe à $\text{End}_{F_s}(V_s)$ pour un certain F_s -espace vectoriel V_s dont la dimension est égale au degré de A . Le groupe $G = \text{SL}_1(A)$ est donc isomorphe sur F_s à $\text{SL}(V_s)$. Les représentations $\text{SL}(V_s) \rightarrow \text{SL}(\wedge^k V_s)$, pour $1 \leq k < \deg A$,

admettent une descente $\mathrm{SL}_1(A) \rightarrow \mathrm{SL}_1(\lambda^k A)$, pour certaines F -algèbres centrales simples $\lambda^k A$, de degré $\binom{\deg A}{k}$. Ces algèbres sont appelées puissances extérieures de l'algèbre A . Une construction rationnelle est donnée dans [KMRT98, §10.A]. En particulier, l'algèbre $\lambda^k A$ est Brauer équivalente à $A^{\otimes k}$. Si A est déployée, $A = \mathrm{End}_F(V)$, alors $\lambda^k A$ est naturellement isomorphe à $\mathrm{End}_F(\wedge^k V)$.

Exemple 2.2. — On suppose maintenant que A est une K -algèbre centrale simple, dont le centre K est une extension quadratique du corps de base F , munie d'une K/F involution unitaire σ . Quand on étend les scalaires de F à F_s , l'algèbre à involution (A, σ) devient isomorphe à un produit $\mathrm{End}_{F_s}(V_s) \times \mathrm{End}_{F_s}(V_s)^{\mathrm{op}}$, munie de l'involution d'échange $(x, y^{\mathrm{op}}) \mapsto (y, x^{\mathrm{op}})$, où $\mathrm{End}_{F_s}(V_s)^{\mathrm{op}}$ désigne l'algèbre opposée de $\mathrm{End}_{F_s}(V_s)$. Le groupe unitaire $\mathrm{SU}(A, \sigma)$ est donc isomorphe sur F_s à $\mathrm{SL}(V_s)$. Si le degré de A est pair, $\deg A = \dim_{F_s}(V_s) = 2n$, la représentation médiane $\mathrm{SL}(V_s) \rightarrow \mathrm{SL}(\wedge^n V_s)$ admet une descente $\mathrm{SU}(A, \sigma) \rightarrow \mathrm{SL}_1(\mathcal{D}(A, \sigma))$, pour une certaine algèbre centrale simple sur F , appelée algèbre discriminante de (A, σ) . A nouveau, une construction rationnelle de l'algèbre discriminante $\mathcal{D}(A, \sigma)$ est donnée dans [KMRT98, §10.E]. C'est une F sous-algèbre de la K -algèbre centrale simple $\lambda^n A$. Son degré est $\binom{2n}{n}$, et elle vérifie $\mathcal{D}(A, \sigma) \otimes_F K \simeq \lambda^n A$.

Exemple 2.3. — Soit (V, q) un F -espace vectoriel muni d'une forme quadratique. Le quotient de l'algèbre tensorielle de V par l'idéal engendré par les éléments $v \otimes v - q(v)$, pour tout $v \in V$, est l'algèbre de Clifford de (V, q) , notée $\mathcal{C}(V, q)$. C'est une F -algèbre $\mathbb{Z}/2$ graduée, et on note $\mathcal{C}_0(V, q)$ sa partie paire.

La structure des algèbres de Clifford est bien connue (cf. [Lam05, §V.2] ou [Sch85, Ch.9(2.10)]). En particulier, si V est de dimension impaire, alors $\mathcal{C}_0(V, q)$ est une F -algèbre centrale simple. L'application naturelle $\mathrm{Spin}(V, q) \rightarrow \mathrm{GL}_1(\mathcal{C}_0(V, q))$ est alors une représentation en algèbre du groupe $\mathrm{Spin}(V, q)$ qui correspond, après déploiement du groupe, à la représentation dite *spinorielle*.

Si en revanche V est de dimension paire, et si on suppose de plus que le discriminant de q est trivial, alors $\mathcal{C}(V, q)$ est un produit $\mathcal{C}^+ \times \mathcal{C}^-$ de deux algèbres centrales simples sur F . On obtient ainsi deux applications

naturelles $\mathrm{Spin}(V, q) \rightarrow \mathrm{GL}_1(\mathcal{C}_0(V, q)) \rightarrow \mathrm{GL}_1(\mathcal{C}^\pm)$ qui correspondent, après déploiement du groupe, aux représentations *semi-spinorielles*.

Ainsi, les algèbres $\mathcal{C}_0(V, q)$ dans le premier cas, et $\mathcal{C}^+$ et $\mathcal{C}^-$ dans le second, sont des algèbres de Tits du groupe $\mathrm{Spin}(V, q)$.

Exemple 2.4. — Soit maintenant (A, σ) une F -algèbre centrale simple munie d'une involution de type orthogonal. On suppose de plus que A est de degré pair. Notons que cette hypothèse n'est pas réellement restrictive; en degré impair, en effet, une telle algèbre est nécessairement déployée, et l'involution est l'adjointe d'une forme quadratique, ce qui nous ramène à la situation de l'exemple précédent. En degré pair, en revanche, l'algèbre A n'est généralement pas déployée. On associe néanmoins à (A, σ) une algèbre de Clifford $\mathcal{C}(A, \sigma)$, qui correspond dans le cas déployé à l'algèbre de Clifford paire de l'espace quadratique associé. Quand le discriminant de σ est trivial, i.e. quand le centre de $\mathcal{C}(A, \sigma)$ est $F \times F$, elle se décompose comme précédemment en $\mathcal{C}(A, \sigma) = \mathcal{C}^+ \times \mathcal{C}^-$, et on obtient des applications naturelles $\mathrm{Spin}(A, \sigma) \rightarrow \mathrm{GL}_1(\mathcal{C}(A, \sigma)) \rightarrow \mathrm{GL}_1(\mathcal{C}^\pm)$, qui sont comme ci-dessus des descentes des représentations semi-spinorielles.

2.2. Involution canonique. — Comme on l'a mentionné dans les exemples ci-dessus, on dispose d'une description précise des algèbres de Tits des groupes algébriques classiques (voir par exemple [KMRT98, §27.B]). Certaines d'entre elles, notamment l'algèbre de Clifford et l'algèbre discriminante, sont munies d'une involution. Étudions cette question du point de vue de la théorie des représentations, et plaçons nous pour simplifier dans le cas des involutions de première espèce, c'est-à-dire F -linéaires. Étant donnée une représentation irréductible d'un groupe déployé, on peut dire, en observant son poids dominant, s'il existe une forme bilinéaire G -invariante, et si cette forme est symétrique ou antisymétrique. De plus, quand une telle forme existe, elle est nécessairement unique, à multiplication par un scalaire près. La représentation est dite orthogonale dans le premier cas, et symplectique dans le second. En utilisant par exemple la description explicite [KMRT98, §27.A] de l'algèbre de Tits associée à une représentation irréductible, on en déduit que les algèbres de Tits qui sont des descentes de représentations orthogonales

ou symplectiques sont munies d'une involution du même type, qui est définie de manière unique.

On obtient ainsi des involutions canoniques sur certaines algèbres de Tits. Ces involutions sont assez peu connues. Ce sont pourtant des invariants des groupes algébriques correspondants, qui peuvent se révéler intéressants, comme en témoigne l'exemple ci-dessous.

Exemple 2.5. — Soit A une F algèbre centrale simple, de degré pair, $\deg(A) = 2n$. La puissance extérieure $\lambda^n A$ est munie d'une involution canonique γ (cf [KMRT98, (10.11)]). Dans le cas déployé, $A = \text{End}_F(V)$, avec $\dim V = 2n$, cette involution γ est adjointe à la forme bilinéaire $\theta : \wedge^n V \times \wedge^n V \rightarrow F$ définie par l'équation

$$\theta(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n, y_1 \wedge \cdots \wedge y_n)e = x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \wedge y_1 \wedge \cdots \wedge y_n,$$

où e est une base quelconque de l'espace vectoriel $\wedge^{2n} V$. L'involution γ est donc de type symplectique si n est impair et orthogonal si n est pair.

Cette involution est particulièrement intéressante quand l'algèbre A est une algèbre de biquaternions $A = (a, b)_F \otimes (c, d)_F$. En effet, l'algèbre $\lambda^2 A$ est alors déployée, de degré $\binom{4}{2} = 6$, et l'involution γ , de type orthogonal, est adjointe à une forme quadratique qui est semblable à la forme d'Albert $q_A = \langle a, b, -ab, -c, -d, cd \rangle$ d'après [KMRT98, (16.3)]. Cette forme quadratique, introduite par Albert, est un invariant classique de l'algèbre A , dont l'indice de Witt détermine l'indice de Schur de A . En particulier, l'algèbre A est à division si et seulement si q_A est anisotrope, et elle est déployée si et seulement si q_A est hyperbolique (voir [Lam05, III.4.8] et [KMRT98, (16.5)]).

Dans un travail commun avec Skip Garibaldi et Jean-Pierre Tignol [GQMT01], nous nous sommes attachés à décrire l'involution canonique de la puissance extérieure médiane $\lambda^n A$ d'une algèbre centrale simple de degré $2n$. Nous allons maintenant décrire les principaux résultats obtenus sur cette question.

2.3. Involution canonique d'une puissance extérieure. — Soit donc A une F -algèbre centrale simple de degré $2n$. On suppose de plus qu'elle se décompose en un produit tensoriel $A = Q \otimes B$, où Q est une

algèbre de quaternions sur F , et B une F -algèbre centrale simple de degré n .

Supposons dans un premier temps que n est impair, auquel cas l'algèbre A admet toujours une décomposition comme ci-dessus. Dans ce cas, l'algèbre $\lambda^n A$ est Brauer équivalente à Q , et son involution canonique γ est de type symplectique. Le résultat suivant montre alors que l'involution γ ne dépend en fait que de l'algèbre de quaternions Q .

Théorème 2.6. — [GQMT01, Thm 1.1] *Si n est impair, alors $(\lambda^n A, \gamma)$ est Witt-équivalente à $(Q, \gamma_Q)^{\otimes n}$, où γ_Q désigne l'involution canonique de Q , i.e. son unique involution symplectique.*

La notion de Witt-équivalence, qui apparaît ici pour les algèbres à involution, est la généralisation naturelle de la Witt-équivalence des espaces quadratiques (voir [DLT00] pour une définition).

Quand n est pair, ce que l'on suppose maintenant, l'involution γ est de type orthogonal, et il découle de l'existence d'une décomposition $A = Q \otimes B$ que $A^{\otimes n}$ et donc $\lambda^n A$ sont déployées. Fixons dans ce cas une forme quadratique q_A à laquelle γ est adjointe. Le théorème 1.4 de [GQMT01] donne une description de q_A à équivalence de Witt près. Contrairement au cas précédent, celle-ci ne dépend pas uniquement de l'algèbre de quaternions Q . La formule fait en effet intervenir, outre la forme norme n_Q de Q , des formes traces $t_k : \lambda^k B \rightarrow F$, $x \mapsto \text{Trd}_{\lambda^k B}(x^2)$ des puissances extérieures de l'algèbre B . Cette description permet notamment, par un argument de type inductif, de montrer le résultat suivant:

Théorème 2.7. — [GQMT01, Cor 1.6] *Soit $A = Q_1 \otimes \cdots \otimes Q_r$ un produit de r algèbres de quaternions, avec $r \geq 3$, et notons T_A la forme trace de A , définie par $T_A(x) = \text{Trd}_A(x^2)$. La classe de similitude de la forme quadratique q_A contient une forme dont la classe de Witt est*

$$2^{n-1} - \frac{2^{n-2}}{n} \langle 2^r \rangle . T_A = 2^{2^{r-1}-r-1} (2^r - (2 - n_{Q_1}) \cdots (2 - n_{Q_r})).$$

En particulier, pour $r = 3$, on obtient la forme quadratique

$$4(n_{Q_1} + n_{Q_2} + n_{Q_3}) - 2(n_{Q_1}n_{Q_2} + n_{Q_1}n_{Q_3} + n_{Q_2}n_{Q_3}) + n_{Q_1}n_{Q_2}n_{Q_3}.$$

Rappelons que la forme d'Albert d'une algèbre de biquaternions appartient au carré I^2F de l'idéal fondamental de l'anneau de Witt de F . En combinant la formule ci-dessus avec le résultat [Gar01a, 6.3(1)] de Garibaldi, on montre que ceci reste vrai en degré plus grand, au moins pour certaines algèbres:

Corollaire 2.8. — [GQMT01, Cor 1.7] *Soit A une F -algèbre centrale simple de degré $2n$ avec n pair, isomorphe à une algèbre de matrices à coefficients dans un produit d'algèbres de quaternions. La forme quadratique q_A appartient à I^nF .*

Notons que ceci ne suffit pas à prouver la conjecture [Gar01a, 6.6] de Garibaldi selon laquelle la propriété ci-dessus est vraie pour toute algèbre d'exposant 2 et de degré $2n$. Il existe en effet, dès le degré 8, des algèbres d'exposant 2 qui ne sont pas isomorphes à une algèbre de matrices à coefficients dans un produit d'algèbre de quaternions (voir §3.1 ci-dessous).

Remarque 2.9. — Contrairement au cas des biquaternions (exple 2.5), l'indice de Witt de la forme q_A d'un produit $A = Q_1 \otimes \cdots \otimes Q_r$ de r algèbres de quaternions, avec $r \geq 3$, n'est pas lié à l'indice de Schur de A . En effet, dans sa construction d'un corps de u -invariant 6 [Mer92], Merkurjev a montré l'existence d'algèbres A comme ci-dessus, à division, et dont le centre est une extension F' de F vérifiant $I^3F' = 0$. L'indice de Schur de A est donc maximal, égal à 2^r , tandis que la forme q_A , qui appartient à $I^{2^r-1}F' = 0$, est hyperbolique.

2.4. Algèbre de Clifford et algèbre discriminante. — L'algèbre de Clifford et l'algèbre discriminante sont également munies d'involutions canoniques. Leur type, explicité dans [KMRT98, (8.12) et (10.11.b)], dépend du degré de l'algèbre initiale. En dehors de cela, on dispose de relativement peu d'information sur ces involutions. Dans son article [Gar01a], Garibaldi a donné une description précise de l'involution canonique de l'algèbre de Clifford quand l'involution de départ est hyperbolique. En utilisant le théorème 2.6, son résultat principal peut être reformulé de la manière suivante:

Théorème 2.10. — [Gar01a, Main Thm] Soit (A, σ) une F -algèbre centrale simple munie d'une involution orthogonale. On suppose que σ est hyperbolique. L'algèbre A est alors nécessairement de la forme $A = M_2(B)$, et on suppose en outre que le degré de B est pair, $\deg B = 2m$, ce qui est automatique si A est non déployée. L'algèbre de Clifford $(\mathcal{C}(A, \sigma), \underline{\sigma})$ se décompose en un produit $(S, \tau) \times (N, \pi)$, avec S déployée et N Brauer-équivalente à A . De plus, le facteur (S, τ) quand m est pair (respectivement (N, π) quand m est impair) est Witt-équivalent à $(\lambda^m B, \gamma)$, tandis que l'autre facteur est hyperbolique.

Ainsi, les résultats rappelés au paragraphe précédent, concernant l'involution canonique de la puissance extérieure médiane d'une algèbre B de degré pair, nous donnent également des renseignements sur l'involution canonique de l'algèbre de Clifford de $M_2(B)$, munie de son involution hyperbolique.

Le théorème 2.10 ci-dessus peut-être interprété en terme d'algèbre discriminante: Comme [KMRT98, §2.B], nous considérons l'algèbre à involution $(B \times B^{\text{op}}, \tau)$, où B^{op} désigne l'algèbre opposée de B , et τ l'involution d'échange définie par $\tau(x, y^{\text{op}}) = (y, x^{\text{op}})$, comme une algèbre à involution unitaire sur l'extension quadratique étale $F \times F$ de F . La puissance extérieure $\lambda^m B$ est alors l'algèbre discriminante $\mathcal{D}(B \times B^{\text{op}}, \tau)$ par [KMRT98, (10.31)], et le théorème 2.10 montre en fait l'existence d'un lien entre cette algèbre discriminante et l'algèbre de Clifford de $M_2(B)$ munie de son involution hyperbolique. Or $B \times B^{\text{op}}$ est isomorphe au centralisateur dans $A = M_2(B)$ d'un élément σ -antisymétrique de carré 1. (Rappelons qu'un tel élément existe si et seulement si l'algèbre à involution (A, σ) est hyperbolique). En effet, l'involution hyperbolique de $M_2(B)$, dont on sait qu'elle est unique à isomorphisme près, est donnée par

$$\sigma\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \sigma_0(d) & \sigma_0(b) \\ \sigma_0(c) & \sigma_0(a) \end{pmatrix},$$

pour une certaine involution orthogonale σ_0 de B . L'application

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mapsto (a, \sigma_0(d)^{\text{op}})$$

identifie alors $B \times B^{\text{op}}$ et le centralisateur dans A de $\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. De plus, la restriction de σ à $B \times B^{\text{op}}$ est l'involution d'échange τ .

Avec ce point de vue, le théorème principal de l'article [QMT02], écrit en collaboration avec Jean-Pierre Tignol, peut-être considéré comme une généralisation du théorème 2.10 de Garibaldi. Le contexte est le suivant: on se donne une algèbre A de degré $n = 4m$, munie d'une involution orthogonale σ , et on suppose que A contient un élément θ , σ -antisymétrique, et de carré central, de sorte que $F(\theta)$ est une extension quadratique étale du corps F . Le centralisateur $\tilde{A}$ dans A de θ est une $F(\theta)$ algèbre centrale simple de degré $2m$, et la restriction $\tilde{\sigma}$ à $\tilde{A}$ de l'involution σ une involution de type unitaire de $\tilde{A}$.

Notons que si le carré de θ vaut 1, l'involution σ est hyperbolique, et l'on est ramené au cas précédent. Dans le cas général, σ devient hyperbolique après une extension quadratique du corps de base. Dans ce contexte, il existe également un lien entre l'algèbre discriminante de $(\tilde{A}, \tilde{\sigma})$ et l'algèbre de Clifford de (A, σ) .

Tout d'abord, l'existence d'un tel élément θ implique que le discriminant de l'involution σ est trivial, de sorte que l'algèbre de Clifford $(\mathcal{C}(A, \sigma), \underline{\sigma})$ se décompose en un produit $(S, \tau) \times (N, \pi)$. Contrairement au cas hyperbolique, l'algèbre S n'est généralement pas déployée. Cependant, après une extension quadratique du corps de base, on peut supposer que θ est de carré 1 et donc que σ est hyperbolique. Ainsi, S est déployée par une extension quadratique de F . Elle est donc Brauer équivalente à une algèbre de quaternions Q , dont une description explicite est donnée dans [QMT02, p.359]. En vertu de [KMRT98, (9.14)], l'algèbre N est Brauer équivalente à $A \otimes Q$, et on montre:

Théorème 2.11. — [QMT02, §2] *L'algèbre discriminante $\mathcal{D}(\tilde{A}, \tilde{\sigma})$ est facteur direct, pour la somme directe des algèbres à involution, de (S, τ) quand m est pair et (N, π) quand m est impair.*

Cette notion de somme directe, qui généralise la somme directe pour les espaces hermitiens, est définie précisément dans [Dej95]. L'énoncé ci-dessus revient à dire, par exemple quand m est pair, que si l'on représente $(S, \tau) \simeq (\text{End}_Q(M), \text{ad}_h)$, pour un certain module hermitien (M, h) sur

l'algèbre Q munie de son involution canonique, il existe un sous-module $M_0 \subset M$ tel que $(\mathcal{D}(\tilde{A}, \tilde{\sigma}), \tilde{\sigma}) \simeq (M_0, \text{ad}_{h_0})$, où h_0 désigne la restriction de h à M_0 . Contrairement au cas hyperbolique, l'orthogonal (M_1, h_1) de (M_0, h_0) dans (M, h) n'est généralement pas hyperbolique. Cependant, il devient hyperbolique après une extension quadratique du corps de base.

Remarque 2.12. — Dans la situation étudiée ici, l'algèbre $\tilde{A}$ est Brauer équivalente à $A \otimes_F F(\theta)$. Elle est donc d'exposant 2. On montre réciproquement [QMT02, Rmk 2.14] que toute algèbre de degré $2m$, d'exposant 2, et munie d'une involution unitaire, est isomorphe à $(\tilde{A}, \tilde{\sigma})$ pour une certaine F -algèbre de degré $4m$ à involution orthogonale σ . Ainsi, le théorème précédent s'applique en fait à toute algèbre à involution unitaire de degré pair et d'exposant 2.

2.5. Une démonstration par les représentations. — La démonstration du théorème 2.11 donnée dans [QMT02] est une démonstration explicite et essentiellement rationnelle. Nous allons ici esquisser un autre argument, élaboré en collaboration avec Skip Garibaldi, et non publié, mais que j'ai présentée au CIRM à Luminy, ainsi qu'au séminaire Variétés Rationnelles à Paris en 2001-2002. Pour cela, nous allons revenir en arrière et nous placer dans le cadre de la théorie des représentations des groupes algébriques, cadre qui paraît naturel pour étudier cette question dans la mesure où les algèbres qui entrent en jeu sont des algèbres de Tits.

Soient donc (A, σ) une algèbre de degré $4m$ à involution orthogonale, et considérons la composante connexe de l'identité du groupe orthogonal $O^+(A, \sigma)$. L'existence d'un élément $\theta \in A$, σ -antisymétrique et de carré central, prouve que ce groupe $O^+(A, \sigma)$ contient un tore S , de rang 1, et qui est déployé si $\theta^2 \in F^{\times 2}$. De plus, un calcul explicite dans le cas déployé permet de montrer que le centralisateur dans G de ce tore S est le groupe spécial unitaire $\text{SU}(\tilde{A}, \tilde{\sigma})$. Par relèvement, le groupe $\text{Spin}(A, \sigma)$ contient également un tore S' . La composante connexe de l'identité du centralisateur dans $\text{Spin}(A, \sigma)$ de S' est un groupe réductif (voir [SS70, II.4.1 et II.5.4]), dont le sous-groupe dérivé est $\text{SU}(\tilde{A}, \tilde{\sigma})$.

Considérons la descente de l'une des deux représentations semi-spinorielles, $\text{Spin}(A, \sigma) \rightarrow \text{GL}_1(\mathcal{C}^\varepsilon)$, où $\mathcal{C}^\varepsilon$ est l'une des deux composantes

de l'algèbre de Clifford. L'algèbre $\mathcal{C}^\varepsilon$ est munie d'une involution canonique, et on peut la représenter sous la forme $(\text{End}_D(M), \text{ad}_h)$, où (M, h) est un module hermitien sur une algèbre à division D , munie d'une involution fixée. Le module M est alors, via la représentation en algèbre ci-dessus, un $\text{Spin}(A, \sigma)$ -module, et la forme h est $\text{Spin}(A, \sigma)$ -invariante.

Supposons maintenant que $\theta^2 \in F^{\times 2}$, de sorte que le tore S' est déployé, et montrons le théorème 2.10. Le tore S' agit sur le module M via ses caractères, et on peut décomposer le F -espace vectoriel M en une somme directe $M = \bigoplus_{\chi \in S^*} M_\chi$. De plus, comme S' commute avec $\text{SU}(\tilde{A}, \tilde{\sigma})$, chaque M_χ est un $\text{SU}(\tilde{A}, \tilde{\sigma})$ sous-module de M (et aussi un D sous-module). Un calcul direct permet alors de montrer que pour tout caractère non nul χ , le sous-module M_χ est totalement isotrope, et la somme directe $M_\chi \oplus M_{-\chi}$ est un sous-module hyperbolique de (M, h) . Il reste à identifier la composante M_0 associée au caractère nul comme $\text{SU}(\tilde{A}, \tilde{\sigma})$ -module. Il suffit pour cela de faire le calcul quand les groupes sont déployés, et de considérer la descente de la représentation obtenue. Suivant la parité de m et la composante de l'algèbre de Clifford choisie, on obtient soit 0, soit la représentation $\text{SU}(\tilde{A}, \tilde{\sigma}) \rightarrow \text{GL}_1(\mathcal{D}(\tilde{A}, \tilde{\sigma}))$, ce qui achève la démonstration dans le cas hyperbolique. Pour obtenir le théorème 2.11, il suffit d'ajouter au raisonnement ci-dessus un argument de descente galoisienne de $F(\theta)$ à F .

Le point de vue des algèbres de Tits permet donc de ramener la démonstration des théorèmes 2.10 et 2.11 à une question de représentations de groupes algébriques.

3. Décomposabilité des algèbres à involution

L'une des applications du théorème 2.11 ci-dessus est un critère de décomposabilité pour les algèbres de degré 8 à involution orthogonale qui généralise un résultat de Knus, Parimala et Sridharan, valable en degré 4. Nous allons maintenant présenter ce résultat, ainsi qu'un résultat antérieur, qui concerne les involutions unitaires, dû à un travail commun avec Nikita Karpenko.

3.1. Décomposabilité: définitions et résultats classiques. —

D'après les théorèmes de structure classiques des algèbres centrales simples (voir [Sch85, Ch.8,Thm.4.5] ou [KMRT98, (1.5)]), si l'algèbre A contient une sous-algèbre A_1 , centrale simple sur F , et non triviale (i.e. distincte de F et de A), alors elle se décompose en un produit tensoriel $A = A_1 \otimes A_2$, où A_2 est le centralisateur dans A de A_1 . On dit alors que l'algèbre A est *décomposable*.

Exemple 3.1. — Albert a ainsi montré que toute algèbre centrale simple sur F de degré 4 et d'exposant 2 est décomposable, c'est-à-dire isomorphe à un produit tensoriel de deux algèbres de quaternions (voir par exemple [KMRT98, §16]). Une telle algèbre est appelée une algèbre de biquaternions.

En degré plus grand, Merkurjev a montré [Mer81] que toute algèbre d'exposant 2 est Brauer-équivalente à un produit tensoriel d'algèbres de quaternions. Mais le critère d'Albert, lui, n'est vrai qu'en degré 4. Ainsi, Amitsur, Rowen et Tignol [ART79] ont prouvé l'existence, sur certains corps, d'algèbres centrales simples A de degré 8 et d'exposant 2 qui n'admettent aucune sous-algèbre de quaternions, et qui sont donc indécomposables. (Une telle algèbre ne satisfait donc pas les hypothèses du corollaire 2.8). Il faut alors considérer l'algèbre de matrices $M_2(A)$ pour mettre en oeuvre le théorème de Merkurjev, et obtenir un produit de quaternions.

Notons que la situation est un peu différente si p est un nombre premier impair. On sait par le théorème de Merkurjev-Suslin [MS82] (voir aussi le livre [GS06])) que toute algèbre d'exposant p est semblable à un produit d'algèbres de degré p . Mais il existe des algèbres de degré p^2 et d'exposant p qui sont indécomposables (cf. [Tig87]).

Supposons maintenant que l'algèbre A est munie d'une involution σ . On dit que l'algèbre à involution (A, σ) est décomposable si A contient une sous-algèbre centrale simple non triviale A_1 qui est stable sous σ . Quand c'est le cas, en effet, le centralisateur A_2 de A_1 dans A est également σ -stable et l'involution σ agit sur $A = A_1 \otimes A_2$ comme $\sigma_1 \otimes \sigma_2$, où σ_i désigne la restriction de σ à A_i .

Exemple 3.2. — Rappelons qu’une algèbre munie d’une involution de première espèce est nécessairement d’exposant 2. Ainsi, toute algèbre de degré 4 à involution de première espèce est une algèbre de biquaternions, donc décomposable. Albert a montré que si l’involution est de type symplectique, elle est également décomposable comme algèbre à involution. Dans le cas orthogonal, en revanche, Amitsur, Rowen et Tignol [ART79] ont également construit des exemples d’algèbres de biquaternions à involution orthogonale n’admettant aucune sous-algèbre de quaternions stable sous l’involution. Une telle algèbre, bien que décomposable, est donc indécomposable comme algèbre à involution.

En petit degré, on peut utiliser les invariants classiques des involutions pour étudier cette question de décomposabilité. Ainsi, il découle de [KMRT98, (7.3)(4)] qu’une involution orthogonale décomposable sur une algèbre dont le degré est une puissance de 2 est de discriminant trivial. Knus, Parimala et Sridharan ont montré que la réciproque est également vraie en degré 4:

Théorème 3.3. — [KPS91a] et [KPS91b]; voir aussi [KMRT98, (15.12)] *Une involution orthogonale sur une algèbre de degré 4 est décomposable si et seulement si son discriminant est trivial.*

En degré plus grand, cependant, la condition n’est pas suffisante, comme le montre les contre-exemples construits par Dherte [Dhe94], Tao [Tao95] et Yanchevskii [Yan95].

Dans un travail commun avec Nikita Karpenko, nous avons prouvé un critère analogue pour les involutions de type unitaire, ce qui achève l’étude de cette question pour les algèbres de degré 4:

Théorème 3.4. — [KQ00, Thm. 3.1] *Une involution unitaire sur une algèbre de degré 4 est décomposable si et seulement si son algèbre discriminante est déployée.*

Remarque 3.5. — Contrairement au cas des involutions de première espèce, une algèbre de degré 4 à involution unitaire peut être d’exposant 4, auquel cas elle est indécomposable. Il est donc nécessaire, pour que (A, σ) soit décomposable, que A soit une algèbre de biquaternions. Ce

n'est cependant pas une condition suffisante, comme le montrent les exemples d'involutions unitaires indécomposables construits dans [Qué97]. Notons également que quand l'algèbre discriminante de (A, σ) est déployée, il découle de [KMRT98, (10.30)] que A est d'exposant 2. C'est donc bien une algèbre de biquaternions.

La démonstration de ce théorème, relativement élémentaire, utilise l'équivalence de catégories entre algèbres à involution de petit degré montrée dans [KMRT98, §15.D], reflet du fait que les diagrammes de Dynkin des groupes de type A_3 et D_3 sont identiques. Elle utilise également le théorème suivant, dû à Albert, et qui montre que pour étudier les involutions unitaires sur une algèbre de quaternions, on peut se ramener au cas des involutions de première espèce:

Proposition 3.6. — [Alb61, Thm. 10.21] *Soit Q une algèbre de quaternions, munie d'une K/F involution unitaire τ . Il existe une F algèbre de quaternions Q_0 telle que $Q = Q_0 \otimes_F K$ et $\tau = \gamma \otimes \bar{}$, où γ désigne l'involution canonique de Q_0 , et $\bar{}$ l'automorphisme non trivial de K/F .*

Notons que cette décomposition ne rentre pas dans le cadre de la décomposabilité des algèbres à involution telle qu'on l'a définie ci-dessus, puisque Q et Q_0 n'ont pas le même centre. On dira plutôt que τ admet une descente. En degré plus grand, une involution unitaire n'admet généralement pas de descente, comme le montre le critère suivant:

Proposition 3.7. — [QMT02, Prop. 3.12] *Soit B une algèbre centrale simple de degré 4 munie d'une K/F involution τ . Elle admet une descente si et seulement si son algèbre discriminante $\mathcal{D}(B, \tau)$ contient une unité g , de carré central, de trace réduite nulle, et qui est symétrique sous l'involution canonique $\perp$ de $\mathcal{D}(B, \tau)$.*

3.2. Cas des algèbres de degré 8 à involution orthogonale. —

La situation se complique singulièrement quand le degré augmente. En degré 8, Knus, Merkurjev, Rost et Tignol ont caractérisé, à l'aide des invariants classiques, les algèbres à involution qui se décomposent en un produit de trois algèbres de quaternions à involution. Ils ont en effet montré:

Théorème 3.8. — [KMRT98, (42.11)] *Soit (A, σ) une algèbre de degré 8 munie d'une involution de type orthogonal. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

- (1) $(A, \sigma) = (A_1, \sigma_1) \otimes (A_2, \sigma_2) \otimes (A_3, \sigma_3)$, pour certaines algèbres de quaternions à involution (A_i, σ_i) ;
- (2) *Le discriminant de σ est trivial, de sorte que $\mathcal{C}(A, \sigma) = \mathcal{C}^+ \times \mathcal{C}^-$, et l'une des deux F -algèbres $\mathcal{C}^+$ et $\mathcal{C}^-$ est déployée.*

Si l'algèbre (A, σ) vérifie les conditions du théorème, elle est à fortiori décomposable. Mais la réciproque est fausse: dans [QMT02, Exple 3.5], nous construisons en effet un exemple d'une algèbre (A, σ) décomposable, mais dont aucune composante de l'algèbre de Clifford n'est déployée.

On peut affaiblir la condition (2) en supposant que l'une des deux composantes de $\mathcal{C}(A, \sigma)$ est d'indice inférieur ou égal à 2. On obtient alors le résultat suivant:

Théorème 3.9. — [QMT02, Thm. 3.1] *Soit (A, σ) une algèbre de degré 8 munie d'une involution de type orthogonal. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

- (1) *A contient un élément antisymétrique de carré central;*
- (2) *Le discriminant de σ est trivial, de sorte que $\mathcal{C}(A, \sigma) = \mathcal{C}^+ \times \mathcal{C}^-$, et l'une des deux F -algèbres $\mathcal{C}^+$ et $\mathcal{C}^-$ est d'indice au plus 2.*

L'algèbre A étant de degré 8, elle est décomposable si et seulement si elle contient une sous-algèbre de quaternions σ -stable. Dans cette sous-algèbre, on peut alors trouver un quaternion pur antisymétrique, qui est donc un élément de A antisymétrique et de carré central. Mais réciproquement, l'existence d'un élément antisymétrique de carré central n'implique pas que (A, σ) est décomposable. Un contre-exemple explicite, utilisant des constructions de Jacobson, est proposé dans [QMT02, Exple 3.5].

Finalement, on peut énoncer un critère de décomposibilité, qui se situe à mi-chemin entre les deux résultats précédents:

Théorème 3.10. — [QMT02, Thm.3.3] *Soit (A, σ) une algèbre de degré 8 munie d'une involution de type orthogonal. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

- (1) (A, σ) est décomposable;
- (2) Le discriminant de σ est trivial, de sorte que $\mathcal{C}(A, \sigma) = \mathcal{C}^+ \times \mathcal{C}^-$, et l'une des deux F -algèbres $\mathcal{C}^+$ et $\mathcal{C}^-$ contient une unité symétrique de carré central dont le centralisateur est déployé.

Remarque 3.11. — L'existence d'une unité g vérifiant les conditions ci-dessus est claire si l'une des composantes de $\mathcal{C}(A, \sigma)$ est déployée. Soit maintenant $g \in \mathcal{C}^\varepsilon$ une telle unité. Son centralisateur est alors Brauer équivalent à $\mathcal{C}^\varepsilon \otimes_F F[g]$. Sous la condition (2) du thm. (3.10), la composante $\mathcal{C}^\varepsilon$ est donc déployée par une extension quadratique de corps, ce qui garantit qu'elle est d'indice au plus 2. Cette condition est donc bien intermédiaire entre les conditions analogues des deux théorèmes précédents.

4. Involutions de Pfister

Ces critères de décomposabilité nous amènent assez naturellement à la question des involutions de Pfister, que nous allons maintenant présenter. Les deux premiers paragraphes sont essentiellement basés sur l'article [BFPQM03], écrit en collaboration avec Eva Bayer-Fluckiger et Parimala (voir aussi [QM02]). Dans 4.3, nous présentons les résultats principaux de [QM], que l'on peut voir comme un point de départ d'une approche différente sur cette même question.

4.1. Involutions de Pfister. — Le point de vue des groupes algébriques fait clairement apparaître la théorie des algèbres centrales simples à involution comme un prolongement naturel de celle des formes quadratiques. Plus concrètement, une involution orthogonale n'est rien d'autre qu'une forme 'tordue' d'une forme quadratique définie à similitude près. On ne dispose cependant pas, dans le cadre des algèbres à involution, d'une théorie algébrique semblable à celle des formes quadratiques. Si le produit tensoriel des algèbres à involution permet de construire un semi-groupe, dont les propriétés rappellent les propriétés multiplicatives de l'anneau de Witt (voir l'article [Lew00] de Lewis), la somme directe, en revanche n'est pas aussi satisfaisante (cf. §4.3 ci-dessous). Néanmoins, compte-tenu des nombreuses propriétés

des formes de Pfister, et du rôle primordial qu'elles ont joué dans le développement de la théorie algébrique des formes quadratiques, il est naturel de leur chercher un analogue, dans le cadre des algèbres à involution.

Plusieurs définitions sont possibles, basées sur différentes propriétés des formes de Pfister, et l'une des premières questions qui se pose est de savoir si elles sont équivalentes. Suivant [BFPQM03], nous proposons les définitions suivantes:

Définition 4.1. — L'algèbre à involution orthogonale (A, σ) est dite *de Pfister* si quand on étend les scalaires au corps de déploiement générique F_A de l'algèbre A , l'involution étendue σ_{F_A} est l'adjointe d'une forme de Pfister.

De manière équivalente, l'algèbre à involution (A, σ) est de Pfister si et seulement si l'involution étendue σ_K est l'adjointe d'une forme de Pfister pour tout corps K qui déploie A . En particulier, si A est déployée, (A, σ) est de Pfister si et seulement si σ est l'adjointe d'une forme de Pfister.

Remarque 4.2. — Si σ_{F_A} est adjointe à une forme quadratique q , elle est aussi adjointe à tout multiple λq , pour $\lambda \in F_A^\times$. Ainsi, σ est de Pfister si et seulement si la classe de similitude de q contient une forme de Pfister. Notons que cette forme de Pfister est alors déterminé de manière unique par l'involution σ .

Définition 4.3. — L'algèbre à involution orthogonale (A, σ) est dite *de type $I \Rightarrow H$* si le degré de A est une puissance de 2, et, pour toute extension K du corps de base F , l'algèbre étendue $(A, \sigma)_K$ est hyperbolique dès qu'elle est isotrope.

Dans le cadre des formes quadratiques, cette propriété “Isotropie implique Hyperbolicité” est caractéristique des formes semblables à une forme de Pfister. Ainsi, les deux définitions sont équivalentes quand l'algèbre A est déployée. De plus, toute involution de type $I \Rightarrow H$ est nécessairement de Pfister.

Définition 4.4. — L’algèbre à involution orthogonale (A, σ) est appelée *produit de quaternions à involutions* si elle est isomorphe à un produit tensoriel $\otimes_{i=1}^r (Q_i, \sigma_i)$, où les Q_i sont des F -algèbres de quaternions.

Les critères de décomposabilité de Knus-Parimala-Sridharan (thm. 3.3) et Knus-Merkurjev-Rost-Tignol (thm. 3.8) mentionnés ci-dessus permettent de caractériser les produits de quaternions à involution en degré inférieur ou égal à 8 à l’aide des invariants classiques des involutions orthogonales (discriminant et algèbre de Clifford). En utilisant ce point de vue, on montre :

Proposition 4.5. — [BFPQM03, Prop 2.10] *Soit (A, σ) une algèbre de degré inférieur ou égal à 8 munie d’une involution de type orthogonal. Il y a équivalence entre :*

- (1) (A, σ) est une algèbre à involution de Pfister;
- (2) (A, σ) est de type I $\Rightarrow H$;
- (3) (A, σ) est un produit de quaternions à involution.

Nous verrons ci-dessous (§4.2.2) que cette approche ne fonctionne plus en degré plus grand. La question de l’équivalence de ces définitions en degré quelconque reste d’ailleurs largement ouverte.

Notons que si (A, σ) est un produit de r quaternions à involution, et si chacune des algèbres de quaternions Q_i est déployée, de sorte que A est également déployée, l’involution σ est adjointe à une forme quadratique q qui est un produit tensoriel $\otimes_{i=1}^r q_i$ de formes quadratiques de dimension 2. Elle est donc semblable à une forme de Pfister.

Or, dans son livre [Sha00, (9.17)], Shapiro a conjecturé qu’un produit de r algèbres de quaternions à involution qui est déployé admet une décomposition comme algèbre à involution dans laquelle chaque algèbre de quaternion est déployée. Il a de plus démontré que ceci est vrai si $r \leq 5$. Il en découle que tout produit de $r \leq 5$ quaternions à involution est une algèbre à involution de Pfister.

Mais la démonstration de Shapiro est indirecte: il s’intéresse en réalité à une autre conjecture, la ‘Pfister Factor Conjecture’, qu’il démontre pour $r \leq 5$, et dont il montre qu’elle implique la conjecture qui nous intéresse ici. Dans [BFPQM03, §4], nous proposons une démonstration directe du

fait qu'un produit de 4 quaternions est une algèbre à involution de Pfister, basée sur l'utilisation de formes traces tordues $x \mapsto \text{Trd}_D(xu\tau(x))$, où (D, τ) est une algèbre de biquaternions à involution, et u une unité τ symétrique de D . Peu de temps après, Sehrir et Tignol [ST04] ont proposé une autre démonstration, valable également pour un produit de 5 algèbres de quaternions, et qui utilise la notion de discriminant des involutions symplectiques, telle qu'elle a été définie par Berhuy, Monsurro et Tignol [BMT03]. Dans l'article [LMTV06], Lewis, Mahmoudi, Tignol et Villa ont construit des exemples d'algèbres déployées à involutions orthogonales $(\text{End}_F(V), \text{ad}_q)$, qui sont décomposables comme algèbres à involution, bien que la forme quadratique sous-jacente q ne soit pas décomposable en un produit tensoriel de deux formes quadratiques. Cependant, pour des questions de degré, ces exemples ne contredisent pas la conjecture de Shapiro énoncée ci-dessus.

4.2. Invariants cohomologiques. — Les n -formes de Pfister engendrent la n -ième puissance $I^n F$ de l'idéal fondamental IF de l'anneau de Witt de F . Par le théorème de Milnor-Voevodsky, cette puissance $I^n F$ est également le noyau de l'invariant $e_{n-1} : I^{n-1} \rightarrow H^{n-1}(F, \mu_2)$. L'utilisation des invariants cohomologiques semble donc naturelle pour étudier cette question.

Nous allons voir ici que, si l'on peut étendre la définition des invariants e_i pour $i = 0, 1, 2$ au cadre des algèbres à involution orthogonales, ce n'est pas le cas de e_3 .

4.2.1. Invariants e_0, e_1 et e_2 . — La définition des invariants e_0 et e_1 est immédiate:

Définition 4.6. — Soit (A, σ) une algèbre à involution orthogonale. On pose:

$$e_0(A, \sigma) = \overline{\deg A} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = H^0(F, \mu_2);$$

Si de plus A est de degré pair (i.e. $e_0(A, \sigma) = 0$), on pose

$$e_1(A, \sigma) = d(\sigma) \in F^\times / F^{\times 2} = H^1(F, \mu_2),$$

où $d(\sigma)$ désigne le discriminant de σ .

Ces invariants étendent la définition des invariants e_0 et e_1 des formes quadratiques au cadre des algèbres à involution. En effet, si A est déployée, et si σ est adjointe à une forme quadratique q , on a $e_0(A, \sigma) = e_0(q)$, et, le cas échéant, $e_1(A, \sigma) = e_1(q)$. Notons cependant que, contrairement au cas des formes quadratiques, l'invariant e_1 n'est défini pour les algèbres à involution que quand le degré de A est pair. L'involution σ , en effet, ne détermine la forme quadratique q qu'à multiplication par un scalaire près. Et l'invariant $e_1(q)$, qui n'est rien d'autre que le discriminant de q , n'est un invariant à similitude près que quand la dimension de l'espace vectoriel sous-jacent est paire.

Pour définir l'invariant e_2 , on considère une algèbre à involution orthogonale (A, σ) de degré pair et de discriminant trivial, de sorte que $e_0(A, \sigma)$ et $e_1(A, \sigma)$ sont nuls. Comme on l'a déjà vu précédemment (cf. exple 2.4), l'algèbre de Clifford de (A, σ) est alors un produit de deux algèbres centrales simples $\mathcal{C}^+$ et $\mathcal{C}^-$. De plus, d'après [KMRT98, (9.12)], leurs classes de Brauer vérifient $[\mathcal{C}^+] + [\mathcal{C}^-] \in \{0, [A]\}$. Ceci permet de donner la définition suivante (cf. [BFPQM03, Def.3.5]):

Définition 4.7. — Soit (A, σ) une algèbre de degré pair à involution orthogonale de discriminant trivial. On pose

$$e_2(A, \sigma) = [\mathcal{C}^+] = [\mathcal{C}^-] \in \text{Br}_2 F/[A],$$

où $\text{Br}_2 F/[A]$ désigne le quotient de la 2-partie du groupe de Brauer de F par le sous-groupe $\{0, [A]\}$.

En particulier, si l'algèbre A est déployée, et si σ est adjointe à une forme quadratique q , l'invariant e_2 est à valeur dans $\text{Br}_2 F$ et on a $e_2(A, \sigma) = e_2(q)$.

Les critères de décomposabilité en un produit de quaternions de Knus-Parimala-Sridharan (thm. 3.3) et Knus-Merkurjev-Rost-Tignol (thm. 3.8) mentionnés ci-dessus admettent une formulation particulièrement simple si l'on utilise les invariants e_i : une algèbre (A, σ) de degré 4 (resp. 8) à involution orthogonale est un produit de quaternions si et seulement si $e_1(A, \sigma)$ est nul (resp. $e_1(A, \sigma)$ et $e_2(A, \sigma)$ sont nuls).

Notons cependant qu'une algèbre de biquaternions à involution orthogonale décomposable admet généralement différentes décompositions, et

que l'on ne peut donc pas interpréter l'invariant $e_2(A, \sigma)$ comme un cup produit des invariants e_1 des deux facteurs comme dans le cas des formes quadratiques [QM02, Rque 4.4].

Malgré tout, certains résultats classiques de la théorie des formes quadratiques se généralisent à ce contexte (voir [QM02, §4]). À titre d'exemple, nous mentionnons ici la généralisation suivante du théorème d'Arason-Pfister pour $I^3 F$:

Proposition 4.8. — *Une algèbre à involution anisotrope (A, σ) dont les invariants e_0 , e_1 et e_2 sont nuls est nécessairement de degré ≥ 8 .*

4.2.2. *Le cas de e_3 .* — Pour comprendre ce qui se passe en degré supérieur, un changement de point de vue semble nécessaire.

Soit (A, σ) une algèbre à involution de Pfister sur F . Le degré de A est une puissance de 2, $\deg A = 2^i$, et après extension des scalaires au corps F_A de déploiement générique de A , l'involution σ_{F_A} est l'adjointe d'une i -forme de Pfister, définie de manière unique (voir rque 4.2), et que l'on note q_σ . On a alors:

Théorème 4.9. — [BFPQM03, Thm.3.1] *L'invariant $e_i(q_\sigma)$ appartient au groupe de cohomologie non ramifié $H_{nr}^i(F_A/F)$ (voir [BFPQM03, §1.1] pour une définition).*

Notons $E_i(A)$ le noyau de la restriction $H^i(F, \mu_2) \rightarrow H^i(F_A, \mu_2)$, et Φ_i l'injection naturelle $\Phi_i : H^i(F, \mu_2)/E_i(A) \rightarrow H_{nr}^i(F_A, \mu_2)$. On a $E_0(A) = E_1(A) = \{0\}$ et $E_2(A) = \{0, [A]\}$. Les résultats du paragraphe précédent montrent en fait que si $i \leq 2$, l'invariant $e_i(q_\sigma)$ provient d'un élément de $H^i(F, \mu_2)/E_i(A)$, qui est justement $e_i(A, \sigma)$.

Pour l'invariant e_3 , on a en revanche le résultat suivant:

Théorème 4.10. — [BFPQM03, Thm.3.9] *Il existe une algèbre de degré 8 à involution de Pfister (A, σ) pour laquelle l'invariant $e_3(q_\sigma)$ n'appartient pas à l'image du morphisme Φ_3 .*

Ainsi, il est impossible d'étendre fonctoriellement la définition de l'invariant e_3 au cadre des algèbres de degré 8 à involution de Pfister.

Remarque 4.11. — La preuve de ce résultat montre que pour tout entier $i \geq 3$ pour lequel la conjecture de Shapiro est connue, les constructions de Merkurjev [Mer92] de produits de quaternions à division dont le centre est un corps F' de dimension cohomologique au plus 2 permettent de construire des éléments explicites dans le groupe de cohomologie non ramifié $H_{nr}^i(F'_A, \mu_2)$ qui ne proviennent pas de la cohomologie du centre $H^i(F' \mu_2)$.

Les invariants cohomologiques ne semblent donc pas un outil pertinent pour étudier cette question en degré ≥ 16 . Nous allons maintenant présenter une autre approche possible de cette même question.

4.3. Caractérisation des facteurs directs. — Un outil important dans la compréhension du comportement des formes de Pfister est le théorème de la sous-forme (voir [Sch85, Ch. 4 §3] ou [Lam05, Ch. 9 §1]). Ce théorème est d'ailleurs le point de départ des méthodes transcendentes, qui ont joué un rôle important dans le développement de la théorie des formes quadratiques.

C'est un résultat qui paraît difficile à généraliser au contexte des algèbres à involution, et ce pour au moins deux raisons. Tout d'abord, si l'on dispose bien d'une notion de somme directe (voir l'article de Dejaiffe [Dej95]), qui étend celle des modules hermitiens, rappelons que la somme directe de deux algèbres à involution n'est pas toujours définie, et, quand elle est définie, n'est généralement pas unique. La notion de facteur direct paraît donc plus délicate à manipuler dans ce contexte. D'autre part, le théorème de la sous-forme fait intervenir l'ensemble des valeurs représentées par une forme quadratique, et cet ensemble n'est pas un invariant à similitude près de la forme quadratique. On ne dispose donc pas de notion analogue pour les involutions.

Néanmoins, l'un des outils principaux de la démonstration de ce théorème est le théorème de représentation de Cassels et Pfister ([Lam05, Thm.1.3 p.300] ou [Sch85, Thm.3.2 p.148]), selon lequel une forme quadratique qui représente un polynôme $P \in F[t]$ sur le corps $F(t)$ le représente également sur $F[t]$. Or Tignol [Tig96] a montré le résultat général suivant:

Théorème 4.12. — [Tig96] *Soit A une F algèbre centrale simple, munie d'une involution σ de type quelconque. On note $A[t] := A \otimes_F F[t]$ et $A(t) := A \otimes_F F(t)$, où t est une indéterminée sur F . Soit $f \in A(t)$ tel que $\sigma(f)f \in A[t]$. Il existe une isométrie $u \in A(t)^\times$, $\sigma(u)u = 1$, telle que $g := uf \in A[t]$.*

Ainsi, l'élément $\sigma(f)f \in A[t]$ s'écrit également $\sigma(f)f = \sigma(g)g$ avec $g \in F[t]$.

Comme l'explique Tignol, ce théorème implique, dans le cas déployé, le théorème de Cassels-Pfister. La preuve de ce fait montre que l'on peut obtenir des renseignements sur les valeurs représentées par une forme quadratique q en regardant les éléments $\text{ad}_q(f)f$, où f est un élément de $\text{End}_F(V)$ de rang 1. Cette idée est le point de départ du résultat suivant, tiré de [QM]:

Théorème 4.13. — [QM, Thm.4.1] *Soient (A, σ) et (B, τ) deux algèbres Brauer-équivalentes, à involutions orthogonales, avec (A, σ) anisotrope. On suppose en outre que A et B sont d'indice au plus 2 ou bien que B est à division. On a alors équivalence entre:*

- (i) (B, τ) est facteur direct de (A, σ) ;
- (ii) *Il existe un idéal à gauche $J \subset B$ de dimension réduite minimale (i.e. égale à l'indice de B) tel que $\tau(J)$ est anisotrope, un idempotent σ -symétrique $e \in A$, et un isomorphisme $\Psi : eAe \simeq B$ tels que pour tout $g \in I_B \cap J_{F_B}$, il existe $f \in A_{F_B}$ tel que $\Psi_{F_B}(e\sigma(f)fe) = \tau(g)g$.*

Dans ce théorème, F_B désigne le corps de fonctions de la variété de Severi-Brauer de B , et $I_B \subset B_{F_B}$ l'idéal générique, c'est-à-dire l'idéal à droite de dimension réduite 1 donné par le point générique de la variété de Severi-Brauer, vu comme un point F_B -rationnel. Notons que si les algèbres sont déployées, ce théorème n'est rien d'autre que le théorème de la sous-forme, au moins dans une version projective, et à similitude près:

Théorème 4.14. — (Comparer avec [Lam05, Thm.2.8 p.305], et [Sch85, Thm.3.7 p.151].) *Soient (V, q_V) et (W, q_W) deux espaces quadratiques sur F , avec q_V anisotrope. On note $F(\mathbb{P}W)$ le corps de fonctions de l'espace projectif $\mathbb{P}W$, et $\delta \in W \otimes_F F(\mathbb{P}W)$ un vecteur*

non nul de la droite générique. Il existe $\lambda \in F^\times$ tel que λq_W est une sous-forme de q_V si et seulement si il existe $\lambda \in F^\times$ tel que la forme $q_{V F(\mathbb{P}W)}$ représente $\lambda q_W(\delta)$.

Cette propriété ne dépend pas du choix d'un élément δ sur la droite générique. En effet, si q_V représente $\lambda q_W(\delta)$, elle représente également $\lambda q_W(\mu\delta) = \mu^2(\lambda q_W(\delta))$ pour tout $\mu \in F_B^\times$.

On dispose ainsi avec le théorème 4.13 d'un énoncé analogue au théorème de la sous-forme, mais valable uniquement dans certains cas particuliers. Qui plus est, il ne s'agit pas vraiment d'une généralisation du théorème de la sous-forme dans la mesure où la preuve donnée dans [QM] repose sur ce théorème. Notons d'ailleurs que, même dans le cas déployé, si le théorème 4.14 ci-dessus est une conséquence évidente du théorème de la sous-forme classique (i.e. à isomorphisme près), on ne dispose pas à ma connaissance d'une démonstration directe, n'utilisant pas le théorème classique.

Finalement, on peut énoncer une caractérisation des facteurs directs valable pour toutes les algèbres centrales simple à involution orthogonale, mais plus faible que le théorème précédent:

Théorème 4.15. — [QM, Thm.3.1] *Soient (A, σ) et (B, τ) deux algèbres Brauer-équivalentes à involution orthogonale. L'algèbre à involution (A, σ) contient (B, τ) comme un facteur direct si et seulement si il existe un idempotent σ -symétrique $e \in A$ et un isomorphisme*

$$\Psi : eAe \simeq B$$

tels que pour tout $g \in I_B$, il existe $f \in A_{F_B}$ vérifiant

$$\Psi_{F_B}(e\sigma(f)fe) = \tau(g)g.$$

Ce théorème n'est pas une généralisation du théorème de la sous-forme. En particulier, aucune hypothèse d'anisotropie n'est nécessaire ici. Qui plus est, il s'agit en réalité d'un critère d'isomorphisme. En effet, quand la condition du théorème est satisfaite, le facteur direct (eAe, σ_{eAe}) est isomorphe à (B, τ) , où e et Ψ sont ceux de l'énoncé. Dans le théorème 4.13, en revanche, la condition (ii) garantit l'existence d'un idempotent $e' \in A$ et d'un isomorphisme d'algèbres à involution $\Psi' : (e'Ae', \sigma_{e'Ae'}) \simeq (B, \tau)$

mais l'étude du cas déployé montre bien que le couple (e', Ψ') est généralement distinct du couple (e, Ψ) (voir [QM, Rque 4.4]).

5. Partie centrale de l'invariant de Rost

Nous allons maintenant quitter les algèbres à involution et nous placer à nouveau du point de vue des groupes algébriques, afin de présenter les résultats de [GQM]. Dans les années 90, Rost a montré que le groupe des invariants normalisés de degré 3 d'un groupe algébrique G/F absolument simple simplement connexe, c'est-à-dire le groupe des transformations naturelles entre foncteurs de cohomologie galoisienne

$$H^1(\star, G) \rightarrow H^3(\star, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)),$$

est un groupe cyclique, admettant un générateur canonique, qu'on appelle l'invariant de Rost (cf. [GMS03]). En un sens, cet invariant est le premier invariant non trivial, dans la mesure où un tel groupe n'admet pas d'invariant normalisé non trivial en degré $d < 3$ [KMRT98, §31].

Exemple 5.1. — Soit $G = \mathrm{Spin}(q_0)$, où q_0 est une forme quadratique non dégénérée de dimension $n \geq 5$ sur F . La suite exacte

$$1 \longrightarrow \mu_2 \longrightarrow \mathrm{Spin}(q_0) \xrightarrow{\pi} \mathcal{O}^+(q_0) \longrightarrow 1$$

induit une application

$$H^1(F, \mathrm{Spin}(q_0)) \xrightarrow{\pi^*} H^1(F, \mathcal{O}^+(q_0)).$$

L'image de $H^1(F, \mathrm{Spin}(q_0))$ sous cette application correspond dans $H^1(F, \mathcal{O}^+(q_0))$ à l'ensemble des classes d'isomorphismes de forme quadratique q de dimension n sur F telles que $[q] - [q_0]$ appartient à la puissance $I^3 F$ de l'idéal fondamental du groupe de Witt de F . L'invariant de Rost est donné dans ce cas par

$$R_{\mathrm{Spin}(q_0)}(u) = e_3([q] - [q_0]),$$

où $[q] = \pi^*(u)$ et e_3 désigne comme précédemment l'invariant d'Arason

$$e_3 : I^3(F) \rightarrow H^3(F, \mu_2) \subset H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)).$$

Exemple 5.2. — Soit maintenant $G = SL(A)$, où A est une F -algèbre centrale simple de degré n . La suite exacte

$$1 \longrightarrow SL(A) \longrightarrow GL(A) \xrightarrow{\text{Nrd}_A} \mathbb{G}_m \longrightarrow 1$$

induit un isomorphisme $H^1(F, SL(A)) \simeq F^\times / \text{Nrd}_A(A^\times)$. Notons $[A]$ la classe de Brauer de A , et $(x)_n$ l'image de $x \in F^\times$ dans $H^1(F, \mu_n) \simeq F^\times / F^{\times n}$. On montre alors que l'invariant R défini par

$$R(x \cdot \text{Nrd}_A(A^\times)) = (x)_n \cdot [A] \in H^3(F, \mu_n^{\otimes 2}) \subset H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$$

est un générateur du groupe des invariants de degré 3 du groupe algébrique G . On ne sait pas, cependant, si cet invariant R coïncide avec l'invariant de Rost de G .

Soit Z le centre de G , et notons i l'inclusion $Z \hookrightarrow G$. Elle induit une transformation naturelle $i^* : H^1(\star, Z) \rightarrow H^1(\star, G)$, de sorte que l'invariant de Rost de G induit un invariant

$$H^1(\star, Z) \rightarrow H^3(\star, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)),$$

qu'on appelle sa partie centrale.

Notons que, bien que $H^1(F, G)$ ne soit qu'un ensemble pointé, la partie centrale de l'invariant de Rost est un invariant de groupes. Autrement dit, pour tout corps K/F , la composée

$$H^1(K, Z) \rightarrow H^1(K, G) \rightarrow H^3(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)),$$

est en fait un morphisme de groupes. En effet, Garibaldi a montré [Gar01b, Lem 7.1] que, plus généralement, on a

$$R_G(\zeta \cdot \xi) = R_G(\zeta) + R_G(\xi)$$

pour tous $\zeta \in H^1(K, Z)$ et $\xi \in H^1(K, G)$, où $\cdot$ désigne l'action de $H^1(K, Z)$ sur $H^1(K, G)$. Ceci découle de la compatibilité de l'invariant de Rost et de l'opération de torsion, montrée par P. Gille dans [Gil00, Lem. 7].

Exemple 5.3. — A l'aide des descriptions explicites rappelées dans 5.1 et 5.2, on peut déterminer la partie centrale de l'invariant de Rost pour les groupes $\text{Spin}(q_0)$ et $SL(A)$. Dans le premier cas, on constate que $R_{\text{Spin}(q_0)}(u)$ ne dépend que de $\pi^*(u)$, de sorte que la partie centrale de $R_{\text{Spin}(q_0)}$ est nulle. Si maintenant $G = SL(A)$, le centre est $Z = \mu_n$, et la

partie centrale de R est le cup produit avec la classe $[A]$, vu maintenant comme une application $H^1(F, \mu_n) \rightarrow H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$. Remarquons que cette classe de Brauer $[A] \in H^2(F, \mu_2)$ est en fait la classe de Tits du groupe $G = \mathrm{SL}(A)$ (cf. [KMRT98, §31]).

Dans le cas général, on ne dispose pas d'une description explicite de l'invariant de Rost comme dans les exemples 5.1 et 5.2. Sa partie centrale, en revanche, admet une description tout à fait analogue à celle de l'exemple 5.3. Ceci a été montré par Merkurjev, Parimala et Tignol [MPT02] pour les groupes classiques. Dans un travail commun avec Skip Garibaldi [GQM], nous avons complété leurs résultats en étudiant la question pour les groupes exceptionnels. En combinant les théorèmes des deux articles, on obtient:

Théorème 5.4 ([MPT02] and [GQM]). — *On suppose que la caractéristique du corps de base F ne divise pas l'exposant du centre Z du groupe G . Si G est de type A , C_n avec n impair, D , E_6 ou E_7 , alors le sous-groupe du groupe des invariants de degré 3 de Z engendré par la partie centrale de l'invariant de Rost est aussi engendré par le cup-produit avec la classe de Tits. Sinon, la partie centrale de l'invariant de Rost est triviale.*

Remarque 5.5. — Bien que l'invariant de Rost soit canonique, on ne sait pas le déterminer parmi les générateurs du groupe des invariants de degré 3 de G (cf. exple 5.2 ci-dessus). C'est pourquoi on se contente dans ce théorème de décrire le sous-groupe engendré par la partie centrale de l'invariant de Rost.

Le cup-produit qui apparaît dans le théorème est induit par une forme bilinéaire

$$Z(k_{sep}) \times Z(k_{sep}) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)$$

qui doit être précisée, notamment pour les groupes de type D_{2m} . Si m est impair, alors Z est un groupe tordu $\mu_{2[E]}$, pour une certaine extension quadratique étale E/k , de sorte que $Z(k_{sep}) = \mu_2(k_{sep}) \times \mu_2(k_{sep})$ et on prend

$$((x, y), (x', y')) \mapsto xx' + yy' \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2).$$

Si m est pair, alors Z est le noyau $R_{E/k}^1(\mu_2)$ de la norme

$$N_{E/k} : R_{E/k}(\mu_2) \rightarrow \mu_2,$$

où E est maintenant cubique étale sur F , et E est un corps si le groupe est de type D_4 trialitaire. Dans ce cas, on a $Z(k_{\text{sep}}) = \{(x, y, z) \in \mu_2(k_{\text{sep}})^3, xyz = 1\}$ et on prend

$$((x, y, z), (x', y', z')) \mapsto xx' + yy' + zz'.$$

Les nouveaux cas dans le théorème sont les groupes de type E_6 , E_7 et D_4 trialitaire. Mais la méthode que nous utilisons s'applique également aux groupes classiques, sauf ceux de type A , ce qui nous permet de retrouver les résultats de [MPT02]. (Les groupes exceptionnels de type E_8 , F_4 et G_2 ont un centre trivial. La partie centrale de l'invariant de Rost est donc automatiquement nulle pour ces groupes.)

La première partie de notre démonstration est en fait tirée de l'article initial [MPT02]: leurs corollaires 1.2 à 1.6, qui sont énoncés pour un module de cycle général, montrent en fait dans notre contexte que tout invariant de groupes $H^1(\star, Z) \rightarrow H^3(\star, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est le cup-produit avec une certaine classe de cohomologie $t \in H^2(k, Z)$. Il reste simplement à montrer, suivant le type du groupe, que cette classe vaut 0, ou bien qu'elle coïncide avec la classe de Tits t_G du groupe G , et ce pour un cup-produit défini de manière adéquate. Dans [MPT02], cette partie de la preuve utilise de façon cruciale la correspondance de Weil entre groupes algébriques et algèbres à involution rappelée dans l'introduction. Cette partie de l'argument est traitée dans [GQM], de manière différente, plus pertinente pour les groupes exceptionnels. Nous commençons par nous ramener au cas où l'indice de Tits du groupe satisfait une certaine condition. Le groupe G contient alors un tore déployé, ainsi qu'un sous-groupe G' (le sous-groupe dérivé du centralisateur du tore en question) semi-simple, simplement connexe, et qui se trouve être, dans chacun des cas, un produit de $\text{SL}(A_\lambda)$, pour certaines algèbres de Tits A_λ du groupe G . Cette réduction se révèle utile, car le centre Z de G est en fait contenu dans ce sous-groupe G' . Qui plus est, une étude précise dans le cas déployé permet de décrire le plongement de Z dans G' . La partie centrale de l'invariant de Rost étant connue pour les groupes $\text{SL}(A)$ (cf. exple 5.3), ceci permet de conclure.

Références

- [Alb61] A. A. ALBERT – *Structure of algebras*, Revised printing. American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XXIV, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1961.
- [ART79] S. AMITSUR, L. ROWEN & J.-P. TIGNOL – “Division algebras of degree 4 and 8 with involution”, *Israel J. Math.* **33** (1979), p. 133–148.
- [BFP95] E. BAYER-FLUCKIGER & R. PARIMALA – “Galois cohomology of the classical groups over fields of cohomological dimension ≤ 2 ”, *Invent. Math.* **122** (1995), no. 2, p. 195–229.
- [BFPQM03] E. BAYER-FLUCKIGER, R. PARIMALA & A. QUÉGUINER-MATHIEU – “Pfister involutions”, *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.* **113** (2003), no. 4, p. 365–377.
- [BMT03] G. BERHUY, M. MONSURRÒ & J.-P. TIGNOL – “The discriminant of a symplectic involution”, *Pacific J. Math.* **209** (2003), no. 2, p. 201–218.
- [Dej95] I. DEJAIFFE – “Somme orthogonale d’algèbres à involution et algèbre de clifford”, *Comm. Algebra* **26**(5) (1995), p. 1589–1612.
- [Dhe94] H. DHERTE – “Decomposition of Mal’cev-Neumann division algebras with involution”, *Math. Z.* **216** (1994), no. 4, p. 629–644.
- [DLT00] I. DEJAIFFE, D. W. LEWIS & J. P. TIGNOL – “Witt equivalence of central simple algebras with involution”, *Rend. Circ. Mat. Palermo (2)* **49** (2000), no. 2, p. 325–342.
- [Gar01a] R. S. GARIBALDI – “Clifford algebras of hyperbolic involutions”, *Math. Z.* **236** (2001), no. 2, p. 321–349.
- [Gar01b] R. S. GARIBALDI – “The roost invariant has trivial kernel for quasi-split groups of low rank”, *Commentarii Mathematici Helvetici* (2001), no. 76, p. 684–711.
- [Gil00] P. GILLE – “Invariants cohomologiques de roost en caractéristique positive”, *K-Theory* **21** (2000), no. 1, p. 57–100.
- [GMS03] S. GARIBALDI, A. MERKURJEV & J.-P. SERRE – *Cohomological invariants in galois cohomology*, University Lecture Series, vol. 28, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.
- [GQM] S. GARIBALDI & A. QUÉGUINER-MATHIEU – “Restricting the roost invariant to the center”, Prépublication.
- [GQMT01] R. S. GARIBALDI, A. QUÉGUINER-MATHIEU & J.-P. TIGNOL – “Involutions and trace forms on exterior powers of a central simple algebra”, *Doc. Math.* **6** (2001), p. 99–120 (electronic).
- [GS06] P. GILLE & T. SZAMUELY – *Central simple algebras and galois cohomology*, Cambridge Studies in Adv. Math., vol. 101, Cambridge University Press, 2006.

- [KMRT98] M.-A. KNUS, S. A. MERKURJEV, M. ROST & J.-P. TIGNOL – *The book of involutions*, Colloquium Publ., vol. 44, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.
- [KPS91a] M.-A. KNUS, R. PARIMALA & R. SRIDHARAN – “Involutions on rank 16 central simple algebras”, *J. Indian Math. Soc. (N.S.)* **57** (1991), no. 1-4, p. 143–151.
- [KPS91b] ———, “Pfaffians, central simple algebras and similitudes”, *Math. Z.* **206** (1991), no. 4, p. 589–604.
- [KQ00] N. KARPENKO & A. QUÉGUINER – “A criterion of decomposability for degree 4 algebras with unitary involution”, *J. Pure Appl. Algebra* **147** (2000), no. 3, p. 303–309.
- [Lam05] T. Y. LAM – *Introduction to quadratic forms over fields*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 67, American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.
- [Lew00] D. W. LEWIS – “The Witt semigroup of central simple algebras with involution”, *Semigroup Forum* **60** (2000), no. 1, p. 80–92.
- [LMTV06] D. W. LEWIS, M. G. MAHMOUDI, J.-P. TIGNOL & O. VILLA – “Decomposable quadratic forms and involutions”, *J. Algebra* **298** (2006), no. 2, p. 612–629.
- [Mer81] A. MERKURJEV – “Sur le symbole de reste normique de degré 2 (en russe)”, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **261** (1981), no. 3, p. 542–547, Traduction anglaise: *Soviet Math. Dokl.* **24** (1981), 546–551.
- [Mer92] ———, “Simple algebras and quadratic forms”, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **55** (1992), no. 1, p. 218–224, Traduction anglaise: *Math. USSR-Izv.* **38** (1992), no. 1, 215–221.
- [MPT02] A. MERKURJEV, R. PARIMALA & J.-P. TIGNOL – “Invariants of quasi-trivial tori and the rost invariant”, *Algebra i Analiz* **14** (2002), no. 5, p. 110–151, Traduction : *St Petersburg Math. J.* **14** (2003), no 5, 791–821.
- [MPW98] A. S. MERKURJEV, I. A. PANIN & A. R. WADSWORTH – “Index reduction formulas for twisted flag varieties, i”, *K-Theory* **14** (1998), no. 2, p. 101–196.
- [MS82] A. S. MERKUR'EV & A. A. SUSLIN – “ K -cohomology of Severi-Brauer varieties and the norm residue homomorphism”, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **46** (1982), no. 5, p. 1011–1046, 1135–1136.
- [QM] A. QUÉGUINER-MATHIEU – “A generic characterization of direct summands for orthogonal involutions”, Prépublication.
- [QM02] A. QUÉGUINER-MATHIEU – “Invariants cohomologiques: des formes quadratiques aux algèbres à involution”, in *Théorie des*

- nombres (Besançon, 2002)*, Publ. Math. UFR Sci. Tech. Besançon, Univ. Franche-Comté, Besançon, 2002, p. 12.
- [QMT02] A. QUÉGUINER-MATHIEU & J.-P. TIGNOL – “Discriminant and Clifford algebras”, *Math. Z.* **240** (2002), no. 2, p. 345–384.
- [Qué97] A. QUÉGUINER – “Cohomological invariants of algebras with involution”, *J. Algebra* **194** (1997), no. 1, p. 299–330.
- [Sch85] W. SCHARLAU – *Quadratic and hermitian forms*, Springer, Berlin, 1985.
- [Sha00] D. B. SHAPIRO – *Compositions of quadratic forms*, Expositions in Mathematics, vol. 33, De Gruyter, 2000.
- [SS70] T. A. SPRINGER & R. STEINBERG – “Conjugacy classes”, in *Seminar on Algebraic Groups and Related Finite Groups (The Institute for Advanced Study, Princeton, N.J., 1968/69)*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 131, Springer, Berlin, 1970, p. 167–266.
- [ST04] A. SERHIR & J.-P. TIGNOL – “The discriminant of a decomposable symplectic involution”, *J. Algebra* **273** (2004), no. 2, p. 601–607.
- [SVdB92] A. SCHOFIELD & M. VAN DEN BERGH – “The index of a Brauer class on a Brauer-Severi variety”, *Trans. Amer. Math. Soc.* **333** (1992), no. 2, p. 729–739.
- [Tao95] D. TAO – “The generalized even Clifford algebra”, *J. Algebra* **172** (1995), no. 1, p. 184–204.
- [Tig87] J.-P. TIGNOL – “Algèbres indécomposables d’exposant premier”, *Adv. in Math.* **65** (1987), no. 3, p. 205–228.
- [Tig96] J.-P. TIGNOL – “A Cassels-Pfister theorem for involutions on central simple algebras”, *J. Algebra* **181** (1996), no. 3, p. 857–875.
- [Tit71] J. TITS – “Représentations linéaires irréductibles d’un groupe réductif sur un corps quelconque”, *J. reine angew. Math.* **247** (1971), p. 196–220.
- [Wei60] A. WEIL – “Algebras with involutions and the classical groups”, *J. Indian Math. Soc. (N.S.)* **24** (1960), p. 589–623 (1961).
- [Yan95] V. I. YANCHEVSKIĬ – “Symmetric and skew-symmetric elements of involutions, associated groups and the problem of decomposability of involutions”, in *K-theory and algebraic geometry: connections with quadratic forms and division algebras (Santa Barbara, CA, 1992)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 58, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, p. 431–444.
-

30 Novembre 2006

ANNE QUÉGUINER-MATHIEU, Laboratoire Analyse, Géométrie & Applications,
UMR CNRS 7539 – Institut Galilée, Université Paris 13, 93430 Villeta-
neuse, France • *E-mail* : queguin@math.univ-paris13.fr
Url : <http://www-math.univ-paris13.fr/~queguin/>