

# **$K$ -THÉORIE DES VARIÉTÉS DE DRAPEAUX ET FORMULES DE RÉDUCTION D'INDICE**

ANNE QUÉGUINER-MATHIEU & CHARLES DE CLERCQ

Soit  $k$  un corps commutatif, et  $A$  une  $k$  algèbre (associative, de dimension finie) centrale simple. D'après le théorème de structure de Wedderburn, l'algèbre  $A$  est isomorphe à une algèbre de matrices à coefficients dans une algèbre à division  $D$ , dont le centre est le corps de base  $k$ . L'indice de Schur de  $A$ , qui est la racine carrée de la dimension de  $D$  sur  $k$ , est un invariant qui mesure la taille de la partie à division de  $A$ .

Quand on étend les scalaires à une extension  $K$  du corps  $k$ , l'algèbre à division  $D$  se décompose elle-même en une algèbre de matrices à coefficients dans une algèbre à division sur  $K$ . L'indice de Schur d'une algèbre centrale simple est donc susceptible de diminuer après extension des scalaires. Cette évolution est difficile à évaluer en général. Cependant, si le corps  $K$  est le corps des fonctions d'une variété de drapeaux, on dispose alors d'une formule, appelée formule de réduction d'indice. L'objectif de ce cours est de présenter la preuve de l'une des premières formules ainsi établie, à savoir pour une variété de Severi-Brauer.

Les applications des formules de réduction d'indice sont nombreuses, comme le montre la littérature. On peut citer par exemple la démonstration par Merkurjev de l'existence d'un corps dont le  $u$ -invariant vaut 6. D'autre part, ces formules apportent une réponse partielle à une question très générale : étant donnée deux variétés de drapeaux  $X$  et  $X'$ , à quelle condition l'une a-t-elle un point rationnel sur le corps des fonctions de l'autre ? Un autre cas connu est donné par le théorème de la sous-forme, qui a également de nombreuses applications, et qui est le point de départ des méthodes dites 'transcendantes' en théorie des formes quadratiques.

L'objectif principal du cours est d'introduire les outils nécessaires pour comprendre l'énoncé de la formule de réduction d'indice, et sa démonstration, due à Schofield et Van Den Bergh. Le cours comportera un volet algébrique et un volet géométrique. En algèbre, on étudiera notamment quelques rudiments de théorie des formes quadratiques, les

bases de la théorie des algèbres centrales simples, (théorèmes de structures, groupe de Brauer, idéaux, corps de déploiement...), et le  $K_0$  d'un anneau. En géométrie nous proposerons une introduction au langage catégorique et à la géométrie algébrique nécessaires à l'étude des variétés de Severi-Brauer. Nous développerons ensuite la théorie générale du  $K_0$  des variétés, avant de démontrer le calcul du  $K_0$  des variétés de Severi-Brauer, du à Quillen, ainsi que certaines de ses conséquences.

Ceci permettra dans un second temps d'expliquer la preuve de la formule de Schofield et Van De Bergh, et d'en présenter quelques applications. Si le temps le permet, les derniers cours esquisseront, à partir d'exemples, le lien qui existe entre les objets étudiés et d'autres objets mathématiques (groupes algébriques, variétés de drapeaux...), et présenteront les formules de réduction d'indice de Merkurjev-Panin-Wadsworth, qui généralisent celles de Schofield et Van Den Bergh.

Ci-dessous, on propose, à titre indicatif, une liste non exhaustive de livres que les étudiants pourront être amenés à consulter en cours de semestre. *Algèbre* :

- Lang, Serge : Algebra. Revised third edition. Graduate Texts in Mathematics, 211. Springer-Verlag, New York.
- Jacobson, Nathan. Basic algebra. I. and II. Second edition. W. H. Freeman and Company, New York.

*Formes Quadratiques* :

- Kahn, Bruno. Formes quadratiques sur un corps. Cours Spécialisés, 15. Société Mathématique de France, Paris.
- Scharlau, Winfried. Quadratic and Hermitian forms. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 270. Springer-Verlag, Berlin.

*Algèbres centrales simples* :

- Chapitre 8 du livre de Scharlau mentionné ci-dessus.
- Pierce, Richard S. Associative algebras. Graduate Texts in Mathematics, 88. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.
- Knus, Max-Albert ; Merkurjev, Alexander ; Rost, Markus ; Tignol, Jean-Pierre. The book of involutions. American Mathematical Society Colloquium Publications, 44. American Mathematical Society, Providence, RI.
- Gille, Philippe ; Szamuely, Tamás. Central simple algebras and Galois cohomology. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 101. Cambridge University Press, Cambridge

*K-théorie algébrique*

- Rosenberg, Jonathan. Algebraic K-theory and its applications. Graduate Texts in Mathematics, 147. Springer-Verlag, New York.

- Srinivas, V. Algebraic K-theory. Progress in Mathematics, 90. Birkhäuser Boston.

*Géométrie algébrique :*

- Hartshorne, Robin. Algebraic geometry. Graduate Texts in Mathematics, No. 52. Springer-Verlag, New York-Heidelberg.

*Catégories et Faisceaux*

- Kashiwara, Masaki ; Schapira, Pierre. Categories and sheaves. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 332. Springer-Verlag, Berlin.