Dualité de Van den Bergh
et Structure de Batalin-Vilkoviskiĭ sur les algèbres de Calabi-Yau

Thierry Lambre [1]

Résumé : La notion de calcul de Tamarkin-Tsygan à dualité permet de construire des structures de Batalin-Vilkoviskiĭ dans un cadre général. Nous appliquons ce résultat à la dualité de Van den Bergh des algèbres pour obtenir une structure BV sur les algèbres de Calabi-Yau.

Summary : The abstract notion of Tamarkin-Tsygan calculus with duality gives Batalin-Vilkoviskiĭ structures in a general setting. We applies this technique to the case of Van den Bergh duality for algebras to prove that Calabi-Yau algebras are BV-algebras.

Classification AMS : 16 E 40, 20 J 06, 55 U 30.

Introduction.

V. Ginzburg a montré récemment que les algèbres de Calabi-Yau sont des algèbres de Batalin-Vilkoviskiĭ (en abrégé, BV-algèbres).

Théorème ([Gi, 3.4.3]). *Soit A une algèbre de Calabi-Yau et soit $(H^*(A,A), \cup, [\ ,\ ])$ l'algèbre de cohomologie de Hochschild de A, munie de sa structure d'algèbre de Gerstenhaber. Il existe un générateur Δ du crochet de Gerstenhaber $[\ ,\ ]$, c'est-à-dire qu'il existe une application $\Delta : H^*(A,A) \to H^{*-1}(A,A)$ satisfaisant à la relation*

$$[\alpha, \beta] = \Delta(\alpha \cup \beta) - (-1)^p \alpha \cup \Delta(\beta) - \Delta(\alpha) \cup \beta$$

pour tout $\alpha \in H^p(A,A)$ et $\beta \in H^q(A,A)$.

Afin de commenter ce résultat, introduisons quelques notations.

Notons $B : H_*(A,A) \to H_{*+1}(A,A)$ le bord de Connes en *homologie* de Hochschild ([C], [L]). Soit d la dimension cohomologique de l'algèbre de Calabi- Yau et soit

$$VdB : H^*(A,A) \to H_{d-*}(A,A)$$

l'isomorphisme de dualité de Van der Bergh ([VdB]).

Soient $\alpha \in H^p(A,A)$, $\beta \in H^q(A,A)$ et $z \in H_r(A,A)$. La contraction

$$\iota_\alpha : H_r(A,A) \to H_{r-p}(A,A)$$

est définie par $\iota_\alpha(z) = z \cap \alpha$ (le symbole $\cap$ désigne ici le *cap*-produit, voir paragraphe 2).

[1] Laboratoire de Mathématiques, UMR 6620 du CNRS, Université B. Pascal, 63177 Aubière Cedex. Courriel : thierry.lambre@math.univ-bpclermont.fr

Les deux ingrédients essentiels de la démonstration du théorème de V. Ginzburg sont les suivants.
1) La contraction satisfait l'identité remarquable suivante de Tamarkin-Tsygan ([T-T]).

$$(TT) \qquad \iota_{[\alpha,\beta]} = [[B, \iota_\alpha]_{gr}, \iota_\beta]_{gr},$$

où dans le membre de droite de cette expression, les crochets $[\ ,\ ]_{gr}$ désignent des commutateurs gradués.
2) L'inverse $D = (VdB)^{-1}$ de l'isomorphisme de dualité de Van der Bergh satisfait l'identité remarquable de Ginzburg ([Gi], 3.4.3).

$$(G) \qquad D(z \cap \alpha) = \pm D(z) \cup \alpha,$$

où le signe est précisé plus bas (1.4).
A partir des identités remarquables (TT) et (G), il est facile de vérifier qu'en posant

$$\Delta = DBD^{-1},$$

on a la relation de Batalin-Vilkoviskiĭ

$$(BV) \qquad \Delta(\alpha \cup \beta) - (-1)^p \alpha \cup \Delta(\beta) - \Delta(\alpha) \cup \beta.$$

Autrement dit le théorème de V. Ginzburg affirme que le conjugué du bord de Connes en homologie de Hochschild par l'inverse de l'isomorphisme de dualité de Van der Bergh est un générateur du crochet de Gerstenhaber de l'algèbre de cohomologie de Hochschild $H^*(A, A)$ de l'algèbre de Cabali-Yau A.

Nous énonçons et employons dans ce texte une généralisation de ce phénomène pour les calculs de Tamarkin-Tsygan à dualité, objets satisfaisant dans un certain cadre de généralité les relations (TT) et (G).

Théorème 1.6. *Soit (H^*, H_*, κ, c) un calcul de Tamarkin-Tsygan à dualité (voir définition 1.3). Notons $D = (c \cap\ -\ )^{-1}$ l'inverse de l'isomorphisme de dualité. Alors un générateur du crochet de Gerstenhaber de H^* est $\Delta = D\kappa D^{-1}$ et l'algèbre de Gerstenhaber H^* est une BV-algèbre.*

Pour exploiter ce résultat général dans le cadre de la dualité de Van den Bergh des algèbres, nous montrons que l'isomorphisme de dualité de Van den Bergh s'exprime comme le *cap*-produit par une certaine classe fondamentale canoniquement associée aux algèbres considérées.

Théorème 4.2. *Soit A une algèbre à dualité de Van den Bergh, de module dualisant $\mathcal{D} = H^d(A, A^e)$, de classe fondamentale $c \in H_d(A, \mathcal{D})$. Alors, pour tout A^e-module M et pour tout entier $p \geq 0$, le cap-produit*

$$c \cap - : H^p(A, M) \to H_{d-p}(A, \mathcal{D} \otimes_A M)$$

est un isomorphisme.

Les resultas 1.6 et 4.2 permettent de fournir une démonstration du théorème de V. Ginzburg.

Dans diverses situations analogues, une dualité en terme de *cap*-produit est bien connue. C'est le cas notamment en cohomologie des groupes ([B-E]) mais aussi dans un cadre de géométrie de Poisson (voir par exemple [H] et [X]).

Il peut être commode de s'aider du dictionnaire suivant :

Dictionnaire analogique

Groupes à dualité	Algèbres à dualité
$\mathbf{Z}$	A
$\mathbf{Z}[G]$	$A^e = A \otimes_k A^{op}$

Le tableau ci-dessous permet de se convaincre que ce dictionnaire analogique est assez fiable.

Cohomologie des groupes	Cohomologie des algèbres
$H^p(G, M) = \mathrm{Ext}^p_{\mathbf{Z[G]}}(\mathbf{Z}, M)$	$H^p(A, M) = \mathrm{Ext}^p_{A^e}(A, M)$
Groupe de type FP	Algèbre de type FP
Dimension cohomologique	
$d = \mathrm{pdim}_{\mathbf{Z}[G]}(\mathbf{Z})$	$d = \mathrm{pdim}_{A^e}(A)$
Module dualisant	
$\mathcal{D} = \mathrm{Ext}^d_{\mathbf{Z}[G]}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}[G])$	$\mathcal{D} = \mathrm{Ext}^d_{A^e}(A, A^e)$
Classe fondamentale	
$H_d(G, \mathcal{D}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}[G]}(\mathcal{D}, \mathcal{D})$	$H_d(A, \mathcal{D}) \cong \mathrm{Hom}_{A^e}(\mathcal{D}, \mathcal{D})$
Théorème de dualité	
Bieri-Eckmann (1973)	Van den Bergh (1998)
si G de type FP	si A de type FP
si G de dimension cohomologique d	si A de dimension cohomologique d
si $\mathrm{Ext}^i_{\mathbf{Z}[G]}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}[G]) = 0,\ i \neq d$	si $\mathrm{Ext}^i_{A^e}(A, A^e) = 0,\ i \neq 0$
si $\mathcal{D}$ est sans torsion sur $\mathbf{Z}$	si $\mathcal{D}$ est A^e-inversible
alors	
le cap-produit par la classe fondamentale est un isomorphisme	
Groupe à dualité de Poincaré orientable	Algèbre de Calabi-Yau
$\mathcal{D} \cong \mathbf{Z}$ comme $\mathbf{Z}[G]$-module	$\mathcal{D} \cong A$ comme A^e-module
avec action triviale de G	avec action triviale de A^e

Dans les deux contextes, le *cap*-produit par une certaine classe fondamentale est un isomorphisme. Dans cette correspondance, les algèbres de Calabi-Yau apparaissent comme l'analogue algébrique des groupes à dualité de Poincaré *orientables*.

Ce texte est organisé comme suit.

1. Structure BV pour les calculs de Tamarkin-Tsygan à dualité.
2. Rappels sur les structures multiplicatives en théorie de Hochschild.
3. Algèbres de type FP.
4. Dualité de Van den Bergh.
5. Une démonstration du théorème de V. Ginzburg.

1. Structure BV pour les calculs de Tamarkin-Tsygan à dualité.

Définition 1.1. *Soit $H^* = \oplus_{p\geq 0} H^p$ un k-espace vectoriel gradué. On note $\mathcal{L}^*$ le k-espace vectoriel gradué décalé, $\mathcal{L}^p = H^{p+1}$. Pour $\alpha \in H^p$, on pose $\mid \alpha \mid = p$ et $deg(\alpha) = p-1$.*
On dit que H^* est une algèbre de Gerstenhaber s'il existe des opérations $\cup$ et $[\ ,\ ]$ telles que :

1) $(H^*, \cup)$ est une algèbre graduée commutative, c'est-à-dire une algèbre dans laquelle on a la relation $\alpha \cup \beta = (-1)^{|\alpha|\cdot|\beta|} \beta \cup \alpha$.

2) $(\mathcal{L}^*, [\ ,\ ])$ est une algèbre de Lie graduée, c'est-à-dire qu'on a la relation d'antisymétrie graduée

$$[\alpha, \beta] = (-1)^{deg(\alpha)\cdot deg(\beta)} [\beta, \alpha]$$

et l'identité de Jacobi graduée

$$(-1)^{deg(\alpha)deg(\gamma)} [\alpha, [\beta, \gamma]] + (-1)^{deg(\beta)deg(\alpha)} [\beta, [\gamma, \alpha]] + (-1)^{deg(\gamma)deg(\beta)} [\gamma, [\alpha, \beta]] = 0.$$

3) Pour tout $\alpha \in \mathcal{L}^p$, $[\alpha,\ -\ ]$ est une dérivation de degré $deg(\alpha)$ de l'algèbre graduée commutative $(H^*, \cup)$, c'est-à-dire qu'on a la relation

$$[\alpha, \beta \cup \gamma] = [\alpha, \beta] \cup \gamma + (-1)^{deg(\alpha)|\beta|} \beta \cup [\alpha, \gamma].$$

Définition 1.2. *Un calcul de Tamarkin-Tsygan est la donnée d'un triplet (H^*, H_*, κ) d'espaces vectoriels gradués satisfaisant aux conditions a), b) et c) ci-dessous.*

a) $(H^*,\ \cup,\ [\ ,\ ])$ est une algèbre de Gerstenhaber telle que $k \subset H^0$.

b) H_* est un $(H^*,\ \cup)$-module gradué, c'est-à-dire qu'il existe une application k-linéaire

$$H^p \otimes_k H_r \to H_{r-p}$$

$$\alpha \otimes z \to z \cap \alpha$$

telle qu'en posant $\iota_\alpha = \ - \ \cap \alpha$, *on a la relation* $\iota_\alpha \circ \iota_\beta = \iota_{\alpha \cup \beta}$.
c) Il existe une application $\kappa : H_* \to H_{*+1}$ *telle que* $\kappa^2 = 0$ *et telle qu'en posant*

$$L_\alpha = [\kappa, \iota_\alpha]_{gr} = \kappa\ \iota_\alpha - (-1)^{|\alpha|} \iota_\alpha\ \kappa,$$

l'espace vectoriel graduée H_* *est un* $(\mathcal{L}^*, [\ ,\ ])$*-module de Lie gradué pour l'opération*

$$\mathcal{L}^{p-1} \times H_r \to H_{r-(p-1)}$$

$$\alpha \otimes z \to L_\alpha(z),$$

c'est-à-dire qu'on a la relation $L_{[\alpha,\beta]} = [L_\alpha, L_\beta]_{gr} = L_\alpha L_\beta - (-1)^{deg(\alpha) deg(\beta)} L_\beta L_\alpha$.
c) La relation suivante est satisfaite :

$$(TT) \qquad [L_\alpha, \iota_\beta]_{gr} = \iota_{[\alpha,\beta]}.$$

Définition 1.3. *Soit* (H^*, H_*, κ) *un calcul de Tamarkin-Tsygan. On dit que ce calcul est un calcul de Tamarkin-Tsygan à dualité s'il existe* $c \in H_d$ *tel que* $c \cap 1 = c$ *et tel que pour tout entier* p,

$$c \cap\ - : H^p \to H_{d-p}$$

est un isomorphisme.

Cet isomorphisme est appelé isomorphisme de dualité. L'élément c *est appelé classe fondamentale du calcul de Tamarkin-Tsygan à dualité.*

Proposition 1.4. (formule de Ginzburg) *Soit* (H^*, H_*, κ, c) *un calcul de Tamarkin-Tsygan à dualité, de classe fondamentale* $c \in H_d$. *Soit* $D = (c \cap\ -\ )^{-1}$ *l'inverse de l'isomorphisme de dualité. Alors pour tout* $\alpha \in H^p$ *et tout* $z \in H_r$, *dans* H_{r-p}, *on a l'égalité*

$$(G) \qquad D(z \cap \alpha) = (-1)^{(d-r)p} D(z) \cup \alpha.$$

Démonstration. Soit $z \in H_r$. Par l'isomorphisme de dualité, il existe $\beta \in H^{d-r}$ tel que $z = c \cap \beta$, ce qui s'écrit encore $D(z) = \beta$. Pour tout $\alpha \in H^p$, on a donc

$$\begin{aligned} z \cap \alpha &= (c \cap \beta) \cap \alpha \\ &= \iota_\alpha\ \iota_\beta\ (c) \\ &= \iota_{\alpha \cup \beta}\ (c) \\ &= c \cap (\alpha \cup \beta) \\ &= (-1)^{(d-r)p} c \cap (\beta \cup \alpha). \\ &= (-1)^{(d-r)p} c \cap (D(z) \cup \alpha), \end{aligned}$$

ce qui s'écrit encore $D(z \cap \alpha) = (-1)^{(d-r)p} D(z) \cup \alpha$.

Lemme 1.5. *Soit (H^*, H_*, κ, c) un calcul de Tamarkin-Tsygan à dualité, de classe fondamentale $c \in H_d$. Soit $D = (c \cap \ - \ )^{-1}$ l'inverse de l'isomorphisme de dualité. On définit $\Delta : H^* \to H^{*-1}$ par*

$$\Delta = D \circ \kappa \circ D^{-1}.$$

Soient $z \in H_r$, $\alpha \in H^p$ et $\beta \in H^q$. Alors on a la relation

$$\begin{aligned} D(z) \cup [\alpha, \beta] = (-1)^{(d-r)q} \ \Delta(D(z) \cup \alpha \cup \beta) \ - (-1)^{(d-r)(p+q)+p} \ \alpha \cup \Delta(D(z) \cup \beta) \\ -(-1)^{(d-r)q} \ \Delta(D(z) \cup \alpha) \cup \beta \ - (-1)^{(p-1)(q+1)+(d-r)q} \ \Delta(D(z)) \cup \alpha \cup \beta. \end{aligned}$$

Démonstration. D'après la formule de Ginzburg 1.4, on a

$$D(z \cap [\alpha, \beta]) = (-1)^{(d-r)(p+q+1)} D(z) \cup [\alpha, \beta].$$

Par ailleurs, $z \cap [\alpha, \beta] = \iota_{[\alpha,\beta]}(z)$.
La relation (TT) de 1.2 s'écrit

$$\iota_{[\alpha,\beta]} = [[\kappa, \iota_\alpha]_{gr}, \iota_\beta]_{gr}$$

d'où

$$\begin{aligned} D(z \cap [\alpha, \beta]) = D \ \kappa \ \iota_{\alpha\cup\beta}(z) - (-1)^p \ D \ \iota_\alpha \ \kappa \ \iota_\beta(z) - (-1)^{(p-1)q} D \ \iota_\beta \ \kappa \ \iota_\alpha(z) \\ -(-1)^{(p-1)(q+1)} D \ \iota_{\alpha\cup\beta} \ \kappa(z). \end{aligned}$$

Calculons successivement les quatre termes de cette expression en utilisant sans cesse la relation $\Delta D = D\kappa$ ainsi que que la formule de Ginzburg.
a) Calcul de $D \ \kappa \ \iota_{\alpha\cup\beta}(z) = \Delta D(z \cap (\alpha \cup \beta)) = (-1)^{(r-d)(p+q)} \Delta(D(z) \cup \alpha \cup \beta)$.
b) Calcul de $(-1)^p \ \ D \ \iota_\alpha \ \kappa \ \iota_\beta(z) =$

$$\begin{aligned} &= (-1)^p \ D \ (\iota_\alpha \ \kappa \ (z \cap \beta)) \\ &= (-1)^p \ D \ (\kappa \ (z \cap \beta) \cap \alpha)) \\ &= (-1)^p \times (-1)^{(d-r+q-1)p} \ D \ (\kappa(z \cap \beta)) \ \cup \ \alpha \\ &= (-1)^{(d-r+q)p} \ \Delta \ (D(z \cap \beta)) \ \cup \ \alpha \\ &= (-1)^{(d-r+q)p+(d-r)q} \ \Delta(D(z) \cup \beta) \ \cup \ \alpha \\ &= (-1)^{(d-r)(p+q)+p} \ \alpha \ \cup \ \Delta(D(z) \cup \beta). \end{aligned}$$

c) De manière analogue à b), on obtient

$$(-1)^{(p-1)q} \ D \ \iota_\beta \ \kappa \ \iota_\alpha(z) = (-1)^{(d-r)(p+q)} \Delta \ (D(z) \cup \alpha) \ \cup \ \beta.$$

d) Enfin, on a $(-1)^{(p-1)(q+1)}\ D\ \iota_{\alpha\cup\beta}\ \kappa(z) =$

$$\begin{aligned} &= (-1)^{(p-1)(q+1)} D(\kappa(z) \cap \alpha \cup \beta) \\ &= (-1)^{(p-1)(q+1)+(d-r)(p+q)} (D\kappa(z))\ \cup\ \alpha \cup \beta \\ &= (-1)^{(p-1)(q+1)+(d-r)(p+q)} \Delta D(z)\ \cup\ (\alpha \cup \beta). \end{aligned}$$

Ces quatre calculs achèvent la démonstration du lemme 1.5.

Corollaire 1.6. *Soit (H^*, H_*, κ, c) un calcul de Tamarkin-Tsygan à dualité. Alors H^* est une BV-algèbre. Plus précisément, en notant $D = (c \cap\ -\ )^{-1}$ l'inverse de l'isomorphisme de dualité, un générateur du crochet de Gerstenhaber de H^* est*

$$\Delta = D\kappa D^{-1}$$

et la relation

$$[\alpha, \beta] = \Delta(\alpha \cup \beta) - (-1)^p \alpha \cup \Delta(\beta) - \Delta(\alpha) \cup \beta$$

est satisfaite.

Démonstration. On applique la formule 1.5 à $z = c$, classe fondamentale du calcul de Tamarkin-Tsygan. Grâce à $c \in H_d$, $D(c) = 1$ et $\Delta(1) = 0$, on aboutit à

$$[\alpha, \beta] = \Delta(\alpha \cup \beta) - (-1)^p \alpha \cup \Delta(\beta) - \Delta(\alpha) \cup \beta,$$

ce qui montre que Δ est un générateur du crochet de Gerstenhaber de H^*.

2. Rappels sur les structures multiplicatives en théorie de Hochschild.

Soient k un corps et A une k-algèbre. On pose $A^e = A \otimes_k A^{op}$. Soit M un A^e-module à gauche. La cohomologie et l'homologie de Hochschild de A à valeur dans M sont respectivement données par $H^*(A, M) = \mathrm{Ext}^*_{A^e}(A, M)$ et $H_*(A, M) = \mathrm{Tor}^{A^e}_*(A, M)$. On sait qu'en posant $C^p(A, M) = Hom_k(A^{\otimes p}, M)$, on a $H^p(A, M) = H^p(C^*(A, M), b)$ où $b : C^p(A, M) \to C^{p+1}(A, M)$ est le bord de Hochschild défini pour $f \in C^*(A, M)$ par

$$\begin{aligned} bf(a_1, \cdots, a_{p+1}) = a_1 f(a_2, \cdots, a_{p+1}) - f(a_1 a_2, a_3, \cdots, a_{p+1}) + \cdots \\ +(-1)^p f(a_1, \cdots, a_{p-1}, a_p a_{p+1}) + (-1)^{p+1} f(a_1, \cdots, a_p) a_{p+1}. \end{aligned}$$

De manière analogue, en posant $C_r(A, M) = M \otimes_k A^{\otimes r}$, on a $H_r(A, M) = H_r(C_*(A, M), b)$ où $b : C_r(A, M) \to C_{r-1}(A, M)$ est donné par la formule

$$\begin{aligned} b(m, a_1, \cdots, a_r) = (m a_1, a_2, \cdots, a_r) - (m, a_1 a_2, a_3, \cdots, a_r) + \cdots \\ +(-1)^{r-1} f(m, a_1, \cdots, a_{r-2}, a_{r-1} a_r) + (-1)^r (a_r m, a_1, \cdots, a_{r-1}). \end{aligned}$$

Gerstenhaber a montré ([Ge]) que l'algèbre de cohomologie de Hochschild $H^*(A, A)$ est une algèbre de Gerstenhaber. Tamarkin et Tsygan ont montré ([T-T]) qu'en notant B le bord de Connes, le triplet $(H^*(A, A), H_*(A, A), B)$ est un calcul de Tamarkin-Tsygan.

Rappelons les définitions des différents produits présents.

Le cup-produit.
Il s'agit d'une application k-linéaire

$$\cup : H^p(A, M) \otimes_k H^q(A, N) \to H^{p+q}(A, M \otimes_A N).$$

Écrivons $\alpha \in H^p(A, M)$ sous la forme $\alpha = cl(f)$ et de même $\beta \in H^q(A, N)$ sous la forme $\beta = cl(g)$ où $f \in C^p(A, M)$ et $g \in C^q(A, N)$ sont des b-cocycles. On définit l'élément $f \cup g$ de $C^{p+q}(A, M \otimes_A N)$ par la formule

$$f \cup g(a_1, \cdots, a_{p+q}) = f(a_1, \cdots, a_p) \otimes_A g(a_{p+1}, \cdots a_{p+q}).$$

La formule $b(f \cup g) = bf \cup g + (-1)^p f \cup bg$ montre que $f \cup g$ est un b-cocycle dès que f et g le sont, ce qui permet définir $\alpha \cup \beta$ comme la classe de cohomologie du b-cocycle $f \cup g$.

Le cap-produit.
Il s'agit d'une application k-linéaire

$$\cap : H_r(A, N) \otimes_k H^p(A, M) \to H_{r-p}(A, N \otimes_A M).$$

Écrivons $z \in H_r(A, N)$ sous la forme $z = cl(\overline{z})$ où $\overline{z} = (n, z_1, \cdots, z_r)$ est un b-cycle de $C_r(A, N)$. Ecrivons $\alpha \in H^p(A, M)$ sous la forme $\alpha = cl(f)$ où f est un b-cocycle de $C^p(A, M)$. Définissons l'élément $\overline{z} \cap f$ de $C_{r-p}(A, N \otimes_A M)$ par la relation

$$\overline{z} \cap f = (-1)^{rp}(n \otimes_A f(a_1, \cdots, a_p), a_{p+1}, \cdots, a_r).$$

La relation $b(\overline{z}) \cap f = \overline{z} \cap bf + (-1)^p b(\overline{z} \cap f)$ montre que $\overline{z} \cap f$ est un b-cycle de $C_{r-p}(A, N \otimes_A M)$. Ceci permet de définir $z \cap \alpha = cl(\overline{z} \cap f)$ comme la la classe d'homologie de ce cycle.

Le *cup*-produit et le *cap*-produit sont reliés par la formule suivante, de démonstration immédiate à partir des définitions ci-dessus.
Pour $z \in H_r(A, N)$, $\alpha \in H^p(A, M)$ et $\beta \in H^q(A, M')$, dans $H_{r-(p+q)}(A,\ N \otimes_A M \otimes_A M')$, on a l'égalité

$$(z \cap \alpha) \cap \beta = (-1)^{pq} z \cap (\alpha \cup \beta).$$

Le crochet de Gerstenhaber.
Soient $\alpha \in H^p(A, A)$ et $\beta \in H^q(A, A)$. Écrivons $\alpha = cl(f)$ et $\beta = cl(g)$ avec f et g cocycles respectifs de $C^p(A, A)$ et de $C^q(A, A)$. Pour définir le crochet de Gerstenhaber $[\alpha, \beta] \in H^{p+q-1}(A, A)$ de α et β, on introduit les applications $k-$linéaires $f \circ_i g : A^{\otimes p+q-1} \to A$, définies pour $1 \leq i \leq p$ par

$$f \circ_i g(a_1, \cdots, a_{p+q-1}) = f(a_1, \cdots, a_{i-1}, g(a_i, \cdots, a_{i+q-1}), a_{i+q}, \cdots a_{p-1+q}).$$

On pose ensuite

$$f \circ g = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{(i-1)(q-1)} f \circ_i g$$

et enfin

$$[f,g] = f \circ g - (-1)^{(p-1)(q-1)} g \circ f.$$

Gerstenhaber a montré la formule

$$b(f \circ g) = f \circ b(g) + (-1)^{q-1} b(f) \circ g + (-1)^{q-1}(g \cup f - (-1)^{pq} f \cup g).$$

Ceci montre que le crochet $[f,g] \in C^{p+q-1}(A,A)$ de deux cocycles f et g est également un cocycle. La classe de cohomologie du cocycle $[f,g]$ est par définition le crochet $[\alpha, \beta]$ des classes α et β.

Le bord de Connes. ([C], [L])
Le bord $B : C_r(A,A) \to C_{r-1}(A,A)$ est donné par la formule

$$B(a_0, a_1 \cdots, a_r) = \sum_{j=0}^{r} (-1)^{jr}(1, a_j, \cdots, a_r, a_0, \cdots, a_{j-1}).$$

Compte tenu de la relation $Bb + bB = 0$, le bord de Connes induit un morphisme de k-espaces vectoriels, qu'on note également B par abus de language :

$$B : H_r(A,A) \to H_{r+1}(A,A).$$

3. Algèbres de type FP.

Définition 3.1. *Soient k un corps et A un k-algèbre associative. On dit que A est une algèbre de type FP si l'algèbre A admet une résolution projective de longueur finie par des A^e-modules projectifs de type fini.*

Pour une algèbre A de type FP, la dimension cohomologique de A est

$$d = \mathrm{pdim}_{A^e}(A).$$

On pose

$$\mathcal{D} = H^d(A, A^e).$$

Rappelons ([B-T]) que le k-espace vectoriel $\mathcal{D} = H^d(A, A^e)$ est un A^e-module à gauche.

On vérifie sans difficulté la proposition suivante.

Proposition 3.2. *Le cap-produit*

$$H_d(A, \mathcal{D}) \otimes_k \; H^d(A, A^e) \to H_0(A, \; \mathcal{D} \otimes_A A^e)$$

$$z \otimes \alpha \to z \cap \alpha$$

fournit un morphisme k-linéaire

$$H_d(A, \mathcal{D}) \to Hom_{A^e}(\mathcal{D}, \mathcal{D}).$$

$$z \to z \cap -$$

Proposition 3.3. *Soit A une algèbre de type FP de dimension cohomologique d. Pour tout A^e-module M, l'application*

$$H_d(A, M) \to Hom_{A^e}(\mathcal{D}, M)$$

$$z \to z \cap \ -$$

est un isomorphisme de k-espace vectoriels.

Démonstration. Le *cap*-produit

$$H_d(A, M) \otimes_k H^d(A, A^e) \to H_0(A, M \otimes_A A^e) \cong M$$

fournit un morphisme

$$H_d(A, M) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{D}, M)$$

$$z \to z \cap \ -$$

et on vérifie facilement que l'application $z \cap \ -$ est A^e-linéaire.
Soit P_* une A^e-résolution projective de type fini de A, de longueur d. On a

$$H_i(A, M) = H_i(P_* \otimes_{A^e} M).$$

En particulier on a la suite exacte courte

$$0 \to H_d(A, M) \to P_d \otimes_{A^e} M \to P_{d-1} \otimes_{A^e} M. \tag{1}$$

Posons $\overline{P}^* = Hom_{A^e}(P_*, A^e)$. On a $H^i(\overline{P}^*) = H^i(A, A^e)$. En particulier, on a la suite exacte courte

$$\overline{P}^{d-1} \to \overline{P}^d \to H^d(A, A^e) = \mathcal{D} \to 0. \tag{2}$$

Par application du foncteur $\mathrm{Hom}_{A^e}(-, M)$ à la suite exacte courte (2), on obtient la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Hom}_{A^e}(\mathcal{D}, M) \to \mathrm{Hom}_{A^e}(\overline{P}^d, M) \to \mathrm{Hom}_{A^e}(\overline{P}^{d-1}, M). \tag{3}$$

Puisque les P_i sont projectifs de type finis, on a des isomorphismes

$$\mathrm{Hom}_{A^e}(\overline{P}^i, M) \cong P_i \otimes_{A^e} M$$

et la suite exacte (3) s'écrit donc

$$0 \to \mathrm{Hom}_{A^e}(\mathcal{D}, M) \to P_d \otimes_{A^e} M \to P_{d-1} \otimes_{A^e} M. \tag{4}$$

Les suites exactes (1) et (4) fournissent l'isomorphisme $H_d(A, M) \cong Hom_{A^e}(\mathcal{D}, M)$.

Remarque : Pour $M = \mathcal{D}$, la proposition 3.3 montre que

$$H_d(A, \mathcal{D}) \to Hom_{A^e}(\mathcal{D}, \mathcal{D}).$$

$$z \to z \cap\ -$$

est un isomorphisme. Ceci conduit à la définition suivante.

Définition 3.4. *Soit A une algèbre de type FP, de dimension cohomologique d. L'unique élément c de $H_d(A, \mathcal{D})$ tel que*

$$c \cap - = id_{\mathcal{D}}$$

s'appelle la classe fondamentale de l'algèbre A.

Proposition 3.5. *Soit A une algèbre FP, de dimension cohomologique d, de classe fondamentale $c \in H_d(A, \mathcal{D})$. Pour tout A^e-module M, le cap-produit*

$$c \cap - : H^d(A; M) \to H_0(A, \mathcal{D} \otimes_A M)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Si $M = A^e$ est libre de rang 1, par définition de la classe fondamentale le *cap*-produit $c \cap -$ est l'application id : $\mathcal{D} \to \mathcal{D}$.

Pour traiter le cas des modules libres, on regarde $c \cap -$ comme une transformation naturelle du foncteur $H^d(A, -)$ vers le foncteur $H_0(A, \mathcal{D} \otimes_A -)$. Ces deux foncteurs sont additifs. En outre, comme tout foncteur Tor, le foncteur $H_0(A, \mathcal{D} \otimes_A -)$ commute aux limites directes. Puisque A est de type FP, le foncteur $\mathrm{Ext}^d_{A^e}(A, -)$ commute également aux limites directes ([Br], VIII, 4.6, p. 196). Ceci montre que si M est un A^e-module libre, le *cap*-produit $c \cap - : H^d(A, M) \to H_0(A, \mathcal{D} \otimes_A M)$ est un isomorphisme.

Enfin, si M est un A^e-module quelconque, on obtient le résultat grâce à une suite exacte $0 \to F' \to F \to M \to 0$, où F et F' sont libres.

4. Dualité de Van den Bergh.

Définition 4.1. *Soit A une algèbre de type FP de dimension cohomologique d. On dit que A est une algèbre à dualité de Van den Bergh si $H^i(A, A^e) = 0$ pour $i \neq d$ et si $\mathcal{D} = H^d(A, A^e)$ est un A^e-module inversible.*

Dans ce cas, $\mathcal{D}$ est appelé le module dualisant de l'algèbre à dualité de Van den Bergh A.

Théorème 4.2. *Soit A une algèbre à dualité de Van den Bergh, de module dualisant $\mathcal{D} = H^d(A, A^e)$, de classe fondamentale $c \in H_d(A, \mathcal{D})$. Alors, pour tout A^e-module M et pour tout entier $p \geq 0$, le cap-produit*

$$c \cap - : H^p(A, M) \to H_{d-p}(A, \mathcal{D} \otimes_A M)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Introduisons les foncteurs $H_i = H_i(A, \mathcal{D} \otimes_A -)$ et $T_i = H^{d-i}(A, -)$. De manière évidente, le foncteur T_i est un foncteur homologique.

Première étape : Grâce à $H^i(A, A^e) = 0$ pour $i \neq d$, montrons que le foncteur T_i est effaçable pour $i > 0$ ([Br], III, 6, p. 72). Par hypothèse, on a $T_i(A^e) = 0$ pour $i > 0$. Par additivité du foncteur T_i, on en déduit $T_i(L) = 0$ pour $i > 0$ et L libre de rang fini, donc $T_i(P) = 0$, pour $i > 0$ et P projectif de type fini. D'après [Br], VIII, 4.6, p. 195, T_i commute aux limites directes. On en déduit $T_i(L) = 0$, pour $i > 0$ et L libre et donc aussi $T_i(P) = 0$ pour $i > 0$ et P projectif.

Deuxième étape : Grâce à $\mathcal{D}$ inversible, montrons à présent que H_i est un foncteur homologique. Soit

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

une suite exacte courte de A^e-modules. Puisque $\mathcal{D}$ est inversible, $\mathcal{D}$ est un A-module projectif à droite, donc plat. On a par conséquent la suite exacte courte de A^e-modules

$$0 \to \mathcal{D} \otimes_A M' \to \mathcal{D} \otimes_A M \to \mathcal{D} \otimes_A M'' \to 0.$$

Cette suite exacte courte fournit la suite exacte longue

$$\cdots \to H_{i+1}(A, \mathcal{D} \otimes_A M'') \to H_i(A, \mathcal{D} \otimes_A M') \to H_i(A, \mathcal{D} \otimes_A M) \to H_i(A, \mathcal{D} \otimes_A M'') \to H_{i-1}(A, \mathcal{D} \otimes_A M') \to \cdots$$

c'est-à-dire qu'on a la suite exacte longue

$$\cdots \to H_{i+1}(M'') \to H_i(M') \to H_i(M) \to H_i(M'') \to H_{i-1}(M') \to \cdots$$

ce qui montre que H_i est un foncteur homologique.

Troisième étape : Montrons à présent que H_i est un foncteur effaçable pour $i > 0$. Puisque $\mathcal{D}$ est A^e-inversible, il est A-projectif à gauche. Donc si P est un A^e-module projectif, $\mathcal{D} \otimes_A P$ est encore projectif et par conséquent $H_i(P) = H_i(A, \mathcal{D} \otimes_A P)$ est nul pour $i > 0$.

Quatrième étape : D'après la proposition 3.5, $c \cap - : T_0 \to H_0$ est un isomorphisme.

Cinquième étape : Par décalage d'indice (cf [Br], III, 7.3, p. 75), on déduit de tout ce qui précède que pour tout $i > 0$, $c \cap - : T_i \to H_i$ est un isomorphisme.

5. Une démonstration du théorème de V. Ginzburg.

Soit A une algèbre de Calabi-Yau de dimension cohomologique d. Posons $H^* = H^*(A, A)$ et $H_* = H_*(A, A)$. Soit B le bord de Connes (voir paragraphe 2). D'après [T-T] (H^*, H_*, B) est un calcul de Tamarkin-Tsygan. Soit $c \in H_d(A, \mathcal{D})$ la classe fondamentale de l'algèbre A. Du théorème 4.2, nous déduisons que (H^*, H_*, B, c) est un calcul de Tamarkin-Tsygan à dualité. D'après le théorème 1.6, on a donc

Théorème. (V. Ginzburg) *Une algèbre de Calabi-Yau est une BV-algèbre. Plus précisément, soit A une algèbre de Calabi-Yau de classe fondamentale c. Soit $D = c \cap -$ l'isomorphisme de dualité de Van den Bergh. Alors $\Delta := D\kappa D^{-1}$ est un générateur du crochet de Gerstenhaber de $H^*(A, A)$, c'est-à-dire que pour tout $\alpha \in H^p(A, A)$ et tout $\beta \in H^q(A, A)$, on a l'égalité*

$$[\alpha, \beta] = \Delta(\alpha \cup \beta) - (-1)^p \alpha \cup \Delta(\beta) - \Delta(\alpha) \cup \beta.$$

Bibliographie.

[B-T], R. Berger & R. Taillefer, Poincaré-Birkhoff-Witt deformations of Calabi-Yau algebras, *J. Noncommutative Geom.*, **1**, 2007, 241-270.

[B-E], R. Bieri & B. Eckmann, Groups with homological duality generalizing Poincaré duality, *Inventiones Math.*, **20**, 1973, 103-124.

[Bi], N. Bourbaki, *Algèbre*, chap. 10, algèbre homologique, Masson, 1980.

[Br], K. Brown, *Cohomology of groups*, GTM 87, 1982, Springer.

[C], A. Connes, Non-Commutative differential geometry, *Publ. Math. IHES*, **62**, 1985, 257-360.

[Ge], M. Gerstenhaber, The cohomology structure of an associative ring, *Ann. of Math.*, **78**, 1963, 267-288.

[Gi], V. Ginzburg, Calabi-Yau algebras, arXiv: 06 12 139, 2006.

[H], J. Huebschmann, Duality for Lie-Rinehart algebras and the modular class, *J. Reine Angew. Math.*, **510**, 1999, 103-159.

[L], J.-L. Loday, *Cyclic homology*, Grundlehren der Math. Wissenschaften, 301, Springer, 1992.

[T-T], D. Tamarkin & B. Tsygan, The ring of differential operators on forms in noncommutative calculus, *Proceedings of Symposia in Pure Math., Am. Math. Soc.*, vol. 73, 2005, 105-131.

[VdB], M. Van den Bergh, A relation between Hochschild homology and cohomology for Gorenstein rings, *Proceedings of the Am. Math. Soc.*, **126**, 1998, 1345-1348 and **130**, 2002, 2809-2810 (Erratum).

[X], P. Xu, Gerstenhaber algebras and BV-algebras in Poisson geometry, *Com. Math. Phys.*, **200**, 1999, 545-560.