

Invariants quantiques sans tressage

A. Bruguières¹
partiellement collaboration avec A. Virelizier²

¹Montpellier II ²Berkeley

La Rochelle, 2006

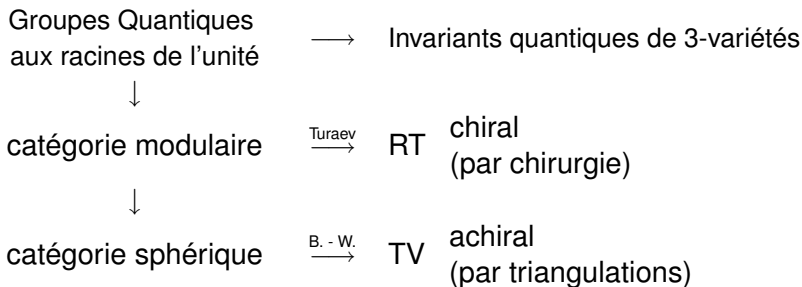
Plan

- 1 Introduction
 - Motivation
 - Trois pistes
- 2 Monades de Hopf (travail en cours avec A. Virelizier)
- 3 Enlacements, twists et catégories en turbans

Plan

- 1 **Introduction**
 - Motivation
 - Trois pistes
- 2 Monades de Hopf (travail en cours avec A. Virelizier)
- 3 Enlacements, twists et catégories en turbans

Les invariants quantiques en dimension 3



catégorie modulaire : catégorie **en rubans** (tressée avec bons duaux) et **semisimple**

catégorie sphérique : catégorie avec bons duaux (mais pas de tressage) et **semisimple**

Par ailleurs dans un contexte **non semisimple** :

Algèbre de Hopf de $\dim < \infty$ \longrightarrow Invariants de 3-variétés
'non semisimples'

Hennings, Kauffman-Radford :

invariant "de type RT" (= cadre tressé)

Kuperberg :

invariant "de type TV" (= cadre non tressé)

Deux questions naturelles

1. Peut-on unifier les séries 'RT' et 'TV' ?

Le centre (ou double) de Kassel-Turaev est le reflet catégorique du double de Drinfeld

\mathcal{S} catégorie monoïdale $\longmapsto Z(\mathcal{S})$ catégorie monoïdale tressée

Dans le cadre semisimple...

Théorème (Müger) : si \mathcal{S} est sphérique, $Z(\mathcal{S})$ est modulaire

Conjecture (Turaev et al.) $TV_{\mathcal{S}} = RT_{Z\mathcal{S}}$.

2. Peut-on trouver un cadre qui unifie les invariants semisimples et les invariants non-semisimples ?

Dans le cas RT (tressé) : Lyubashenko

L'approche unificatrice de Lyubashenko

Lyubashenko envisage le cadre suivant :
une catégorie

- en rubans
- admettant un coend L
- (cadre non linéaire)

Une catégorie en rubans \mathcal{C} est

- une catégorie monoïdale, produit tensoriel \otimes , objet unité I ;
- munie d'un tressage $c_{X,Y} : X \otimes Y \xrightarrow{\sim} Y \otimes X$
- avec des 'bons duaux' (structure souveraine)

Théorème de Shum : La catégorie des enchevêtrements Tang (tangles) en rubans est la catégorie en rubans universelle.

Corollaire : une catégorie en rubans \mathcal{C} définit des invariants d'enchevêtrements en rubans colorés par les objets de \mathcal{C} .

Un coend de \mathcal{C} est la donnée de

- un objet L de \mathcal{C} ;
- pour tout X dans \mathcal{C} , $i_X : X^* \otimes X \rightarrow L$
- i_X est dinaturel en X ;
- (L, i) est universel pour ces propriétés

Remarques

$$i_X : X^* \otimes X \rightarrow L \xleftrightarrow{1:1} \delta_X : X \rightarrow X \otimes L$$

et i_X dinaturel : $\iff \delta_X$ naturel ;

le coend, s'il existe, est unique à iso unique près (et c'est une notion 'monoïdale')

Notation de McLane : $L = \int^{\mathcal{C}} X^* \otimes X$

Mirifique coend !

Le coend L est un objet mirifique : il a une structure très riche.

- L est une cogèbre et tout objet X est un L -comodule via δ_X
- L est une algèbre de Hopf dans \mathcal{C} (Majid)

Alors comme ça :

groupe quantique \longrightarrow catégorie \longrightarrow groupe quantique dans la catégorie

tout ça pour ça ? ! ?

En fait il se passe quelque chose de non-trivial

Exemple : H algèbre de Hopf de dim finie co-quasitriangulaire
 $\longrightarrow \mathcal{C} = \text{comod } H$ catégorie tressée.

Le coend L de \mathcal{C} , en tant que cogèbre : H muni de la coaction (co)adjointe.

Mais le produit de L n'est pas celui de H :

La R -matrice intervient dans l'expression du produit de L .

Mirifique coend - suite

- L est une algèbre de Hopf dans \mathcal{C}
- tout enchevêtrement de type ' n -poignée' définit une n -forme sur L
- tout 'élément' de L ($\alpha : I \rightarrow L$) définit un invariant d'entrelacs en rubans $\langle \quad \rangle_\alpha$
- un 'élément de Kirby' (Virelizier) définit un invariant de 3-variétés RT_α .

Au tableau pour les explications !

Mirifique coend - suite

- L est une algèbre de Hopf dans \mathcal{C}
- tout enchevêtrement de type ' n -poignée' définit une n -forme sur L
- tout 'élément' de L ($\alpha : I \rightarrow L$) définit un invariant d'entrelacs en rubans $\langle \quad \rangle_\alpha$
- un 'élément de Kirby' (Virelizier) définit un invariant de 3-variétés RT_α .

Au tableau pour les explications !

Plan

- 1 Introduction
 - Motivation
 - **Trois pistes**
- 2 Monades de Hopf (travail en cours avec A. Virelizier)
- 3 Enlacements, twists et catégories en turbans

Résumons-nous

Pour construire des invariants, on a besoin :

- 1) d'un bon cadre catégorique ;
- 2) d'un objet L de nature algébrique, de type 'groupe quantique', qui vit dans ce cadre catégorique ;
- 3) d'un encodage des ' n -poignées' par des n -formes sur L .

Peut-on exprimer l'encodage des n -poignées par une formule universelle, indépendamment du choix d'une catégorie ou d'un objet L particulier ?

Oui : par les Diagrammes de Hopf, cf. *Hopf Diagrams and Quantum Invariants*, B. - V. AGT 2006.

Par quoi peut-on remplacer la notion d'algèbre de Hopf dans un cadre non tressé ?

Par la notion de **monade de Hopf** : \longrightarrow partie 2

A-t-on réellement besoin du tressage pour décrire de manière catégorique les entrelacs et les enchevêtrements qui servent dans la construction des invariants à la RT ?

Non : la notion d'**enlacement** suffit (au prix d'une axiomatique moins facile à manipuler que celle des catégories en rubans),
cf *Double Braidings, Twists and Tangle Invariants*, B. JPAA
2005 : \longrightarrow partie 3

Monades

Soit \mathcal{C} une catégorie 'nue'. La catégorie $\text{EndoFun } \mathcal{C}$ est monoïdale pour \circ

Une **monade** est un monoïde dans $\text{EndoFun}(\mathcal{C})$, soit :

- un foncteur $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$
- deux morphismes (transformations naturelles) $\mu : T^2 \rightarrow T$ et $\eta : 1_{\mathcal{C}} \rightarrow T$
- axiomes d'associativité et d'unité.

On définit la notion de T -module (aussi appelée T -algèbre).
Soit $T - \mathcal{C}$ la catégorie des T -modules.

On a une paire de foncteurs adjoints :

$$(F_T : \mathcal{C} \rightarrow T - \mathcal{C}, U_T : T - \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C})$$

Bimonades

Supposons \mathcal{C} monoïdale.

Une monade T est une **bimonade** si $T - \mathcal{C}$ est monoïdal (et U_T monoïdal strict).

Théorème. T est une bimonade $\iff T$ est muni de

$$\Delta_{X,Y} : T(X \otimes Y) \rightarrow T(X) \otimes T(Y)$$

$$\varepsilon : I \rightarrow T(I)$$

avec axiomes de coassociativité, coünité, et compatibilité au produit μ .

Petit miracle : la compatibilité s'écrit sans tressage

Notion introduite par Moerdijk sous le nom 'Hopf monad'...

Monades de Hopf

Supposons que \mathcal{C} a des bons duaux (pour simplifier).

Une monade de Hopf est une bimonade T telle que $T - \mathcal{C}$ a des duaux à droite et à gauche.

Théorème. T est 'de Hopf' si et seulement si T a un antipode à droite et à gauche.

Axiomes des antipodes

Un antipode à gauche *left antipode for T* est un morphisme fonctoriel

$$s'_X : T((TX)^*) \rightarrow X^*$$

vérifiant

$$(\eta_X \otimes 1_{X^*}) \text{coev}_X \varepsilon = (\mu_X \otimes s'_X) \Delta(T(X), (T(X))^*) T(\text{coev}_{T(X)})$$

$$\varepsilon T(\text{ev}_X) T((\eta_X)^* \otimes 1_X) = \text{ev}_{T(X)} (s'_{T(X)} T(\vee \mu_X) \otimes 1_{T(X)}) \Delta((T(X))^*, X)$$

$$s'_X \mu_{T(X)^*} = s'_X T(s'_{T(X)}) T^2(\mu_X)^*$$

Remarque a posteriori : le dernier axiome est conséquence des deux autres, comme dans le cas des algèbres de Hopf, mais la preuve est plus difficile...

Monades de Hopf, suite

Si H est une algèbre de Hopf dans une catégorie tressée \mathcal{C} , le foncteur $X \mapsto X \otimes H$ est une monade de Hopf.

La plupart des notions associées aux algèbres de Hopf de dimension finie s'étendent aux monades de Hopf :

- modules de Hopf et théorème de structure des modules de Hopf (Sweedler)
- monades de Hopf quasitriangulaires, élément de Drinfeld, twist, structure balancée, monade de Hopf en rubans...
- monades de Hopf involutives : $s^l = s^r$
- monades de Hopf semisimples, séparables

Théorème de Maschke : T semisimple $\iff T$ separable $\iff T$ admet une intégrale λ tq $\varepsilon\lambda = 1_I$.

Intégrale : $\lambda : I \rightarrow T(I)$ tq $\mu_I T(\lambda) = \lambda\varepsilon$.

L'exemple central

Soit \mathcal{C} catégorie monoïdale avec bons duaux. On suppose

$$Z(X) := \int^{Y \in \mathcal{C}} Y^* \otimes X \otimes Y$$

existe pour tout X .

Notons que $Z(I)$ est le coend L et, si \mathcal{C} est tressée,
 $Z(X) = X \otimes L$.

Théorème. Z est une monade de Hopf en rubans involutive, et
 $Z - \mathcal{C} = Z(\mathcal{C})$

Corollaire. Si \mathcal{C} est sphérique, $Z(\mathcal{C})$ est prémodulaire.

L'inversibilité de la S -matrice résiste encore un peu.

Ce qu'on espère

Démontrer le théorème de Müger (dans un cadre non-linéaire, et non-semisimple) par des techniques classiques de théorie des algèbres de Hopf.

A terme, pouvoir unifier les invariants de type RT , TV dans le cadre le plus général.

Turbans

Un turban est un enchevêtrement en rubans tel que deux composantes distinctes se croisent un nombre pair de fois.
Exemples : une tresse pure, un stringlink, une ' n -poignée', un entrelacs.

Proposition - remarque : la catégorie des turbans est la sous-catégorie monoïdale de la catégorie Tang engendrée par le twist et la dualité (évaluations et coévaluations).

Enlacement

Soit \mathcal{C} une catégorie monoïdale. Un enlacement (twine) est un iso fonctoriel

$$D_{X,Y} : X \otimes Y \xrightarrow{\sim} X \otimes Y$$

vérifiant :

$$D_{I,I} = 1_I$$

$$(D_{X,Y} \otimes 1_Z)D_{X \otimes Y, Z} = (1_X \otimes D_{Y,Z})D_{X, Y \otimes Z}$$

$$(D_{X \otimes Y, Z} \otimes 1_T)(1_X \otimes D_{Y,Z}^{-1} \otimes 1_T)(1_X \otimes D_{Y, Z \otimes T})$$

$$= (1_X \otimes D_{Y, Z \otimes T})(1_X \otimes D_{Y,Z}^{-1} \otimes 1_T)(D_{X \otimes Y, Z} \otimes 1_T)$$