Cohomologie et Homologie de Poisson : dualité?

Anne Pichereau
(Université de Poitiers)

Les différentielles de Kähler

$(\mathcal{A}, \cdot)$ $\mathbf{F}$-algèbre associative, commutative.

$\mathcal{A}$-module des formes différentielles de Kähler :

$$\Omega^1(\mathcal{A}) := \{g\,\mathsf{d}f \mid f, g \in \mathcal{A}\},$$

modulo les relations :

(1) $\mathsf{d}(f \cdot g) = f\mathsf{d}g + g\mathsf{d}f$ (Leibniz),
(2) $\mathsf{d}(f + g) = \mathsf{d}f + \mathsf{d}g$,
(3) $\mathsf{d}c = 0$, $c \in \mathbf{F}$.

k-différentielles de Kähler :

$$\Omega^k(\mathcal{A}) := \bigwedge^k \Omega^1(\mathcal{A}).$$

$$\Omega^\bullet(\mathcal{A}) := \bigoplus_{k \in \mathbf{N}} \Omega^k(\mathcal{A}).$$

Opérations sur les différentielles de Kähler:

(1) Le produit extérieur :

$$\wedge : \Omega^k(\mathcal{A}) \times \Omega^l(\mathcal{A}) \to \Omega^{k+l}(\mathcal{A})$$

Associatif, gradué commutatif

(2) La différentielle de de Rham :
$\mathsf{d} : \Omega^\bullet(\mathcal{A}) \to \Omega^{\bullet+1}(\mathcal{A})$ définie par :

$$\mathsf{d}\Big(f_0 \,\mathsf{d} f_1 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d} f_k\Big) := \mathsf{d} f_0 \wedge \mathsf{d} f_1 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d} f_k$$

d dérivation graduée de $(\Omega^\bullet(\mathcal{A}), \wedge)$:

$$\mathsf{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathsf{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^k \, \alpha \wedge \mathsf{d}\beta,$$

pour $\alpha \in \Omega^k(\mathcal{A})$, $\beta \in \Omega^\bullet(\mathcal{A})$.

Les multi-dérivations

$(\mathcal{A}, \cdot)$ $\mathbf{F}$-algèbre associative, commutative.

Dérivations de $(\mathcal{A}, \cdot)$: $\mathfrak{X}^1(\mathcal{A}) \subset \mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{A})$

$$\mathcal{V}[fg] = f\mathcal{V}[g] + g\mathcal{V}[f] \qquad \text{(Leibniz)}$$

k-dérivations de $(\mathcal{A}, \cdot)$: $\mathfrak{X}^k(\mathcal{A}) \subset \mathrm{Hom}\left(\bigwedge^k \mathcal{A}, \mathcal{A}\right)$

$$P[fg, f_2, \dots, f_k] = \\ fP[g, f_2, \dots, f_k] + gP[f, f_2, \dots, f_k]$$

$$\mathfrak{X}^\bullet(\mathcal{A}) := \bigoplus_{k \in \mathbf{N}} \mathfrak{X}^k(\mathcal{A}).$$

Opérations sur les multi-dérivations:

(1) Le produit extérieur :

$$\begin{array}{cccc} \wedge & : & \mathfrak{X}^p(\mathcal{A}) \times \mathfrak{X}^q(\mathcal{A}) & \to & \mathfrak{X}^{p+q}(\mathcal{A}) \\ & & (P, Q) & \mapsto & P \wedge Q \end{array}$$

$$(P \wedge Q)[f_1, \ldots, f_{p+q}] :=$$

$$\sum_{\sigma \in S_{p,q}} \epsilon(\sigma) P[f_{\sigma(1)}, \ldots, f_{\sigma(p)}] Q[f_{\sigma(p+1)}, \ldots, f_{\sigma(p+q)}],$$

Associatif, gradué commutatif :

$$P \wedge Q = (-1)^{pq} Q \wedge P.$$

(2) Le crochet de Schouten :

$$\begin{array}{rcccl} [\cdot\,,\cdot]_S & : & \mathfrak{X}^p(\mathcal{A}) \times \mathfrak{X}^q(\mathcal{A}) & \to & \mathfrak{X}^{p+q-1}(\mathcal{A}) \\ & & (P,Q) & \mapsto & [P,Q]_S \end{array}$$

$$[P,Q]_S\,[f_1,\ldots,f_{p+q-1}] =$$

$$\sum_{\sigma\in S_{q,p-1}} \epsilon(\sigma) P\left[Q[f_{\sigma(1)},..,f_{\sigma(q)}], f_{\sigma(q+1)},..,f_{\sigma(q+p-1)}\right]$$

$$-(-1)^{(p-1)(q-1)} \quad \left(P \longleftrightarrow Q\right)$$

Crochet de Lie gradué sur $\mathfrak{X}^\bullet(\mathcal{A})$.

- gradué (modulo un décalage des degrés),
- anti-commutativité graduée,
- Jacobi gradué.

Produit intérieur

Action naturelle de $\mathfrak{X}^\bullet(\mathcal{A})$ sur $\Omega^\bullet(\mathcal{A})$.
Pour $P \in \mathfrak{X}^p(\mathcal{A})$,

$$\imath_P : \Omega^\bullet(\mathcal{A}) \to \Omega^{\bullet - p}(\mathcal{A}),$$

application $\mathcal{A}$-linéaire, donnée par :

$$\imath_P(\mathrm{d}f_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f_n) := \sum_{\sigma \in S_{p,n-p}} \epsilon(\sigma) P[f_{\sigma(1)}, \ldots, f_{\sigma(p)}] \, \mathrm{d}f_{\sigma(p+1)} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f_{\sigma(n)}$$

Formule de Cartan

Pour $P, Q \in \mathfrak{X}^\bullet(\mathcal{A})$, on a :

$$\left[[\imath_P, \mathrm{d}] , \imath_Q \right] = \imath_{[P,Q]_S}$$

où le crochet $[\cdot\,,\cdot]$ désigne le commutateur d'applications linéaires graduées de $\Omega^\bullet(\mathcal{A})$.

Algèbre de Poisson

Dans la suite, $(\mathcal{A}, \cdot)$ est munie d'une structure de Poisson notée π ou $\{\cdot\,,\cdot\}$.

Structure de Poisson sur $\mathcal{A}$:

$$\pi \in \mathfrak{X}^2(\mathcal{A}) \text{ telle que } [\pi, \pi]_S = 0.$$

On a donc :

$$\{\cdot\,,\cdot\} = \pi \in \mathrm{Hom}\left(\wedge^2\mathcal{A}, \mathcal{A}\right)$$

avec :

$$\{fg, h\} = f\,\{g, h\} + g\,\{f, h\} \qquad \text{Leibniz},$$

$$\{\{f, g\}\,, h\} + \{\{g, h\}\,, f\} + \{\{h, f\}\,, g\} = 0 \qquad \text{Jacobi},$$

pour $f, g, h \in \mathcal{A}$.

Cohomologie de Poisson

$(\mathcal{A}, \cdot, \pi = \{\cdot\,,\cdot\})$ algèbre de Poisson.

Cochaines : les multidérivations de $\mathcal{A}$.
Opérateur de cobord de Poisson :

$$\begin{array}{rcl} \delta_\pi = -[\,\cdot\,,\pi]_S \;:\; \mathfrak{X}^\bullet(\mathcal{A}) & \to & \mathfrak{X}^{\bullet+1}(\mathcal{A}) \\ Q & \mapsto & \delta_\pi(Q) \end{array}$$

ce qui s'écrit aussi:

$$\begin{aligned} \delta_\pi(Q)[f_0,\ldots,f_q] :=& \\ & \sum_{i=0}^{q}(-1)^i \left\{f_i, Q[f_0,\ldots,\widehat{f_i},\ldots,f_q]\right\} \\ +& \sum_{i<j}(-1)^{i+j} Q\left[\left\{f_i,f_j\right\}, f_0,\ldots,\widehat{f_i},\ldots,\widehat{f_j},\ldots,f_q\right]. \end{aligned}$$

Les espaces de cohomologie de Poisson :

$$H^k(\mathcal{A}) := \frac{\ker \delta_\pi^k}{\operatorname{Im} \delta_\pi^{k-1}}, \qquad k \in \mathbf{N}.$$

Homologie de Poisson

$(\mathcal{A}, \pi = \{\cdot\,,\cdot\})$ algèbre de Poisson.

Chaines : les différentielles de Kähler.
Opérateur de bord de Poisson :

$$\partial^\pi = [\imath_\pi, \mathrm{d}] \;:\; \Omega^\bullet(\mathcal{A}) \;\to\; \Omega^{\bullet-1}(\mathcal{A})$$

$$\partial^\pi = [\imath_\pi, \mathrm{d}] = \imath_\pi \circ \mathrm{d} - \mathrm{d} \circ \imath_\pi,$$

ce qui s'écrit aussi:

$$\begin{aligned}
&\partial^\pi(f_0\,\mathrm{d}f_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f_k) = \\
&\qquad \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1}\ \{f_0, f_i\}\ \mathrm{d}f_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}f_i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f_k \\
&\quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} f_0\,\mathrm{d}\left\{f_i, f_j\right\} \wedge \mathrm{d}f_1 \wedge \\
&\qquad\qquad\qquad \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}f_i} \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}f_j} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f_k.
\end{aligned}$$

Les espaces d'homologie de Poisson :

$$H_k(\mathcal{A}) := \frac{\ker \partial^\pi_k}{\mathrm{Im}\, \partial^\pi_{k+1}}, \qquad k \in \mathbf{N}.$$

Dualité?

Cadre géométrique - Cadre algébrique.

(1) $\mathcal{A} = \mathbf{C}^\infty(M, \mathbf{R})$, M variété réelle, lisse, orientée de dimension n.

$\Rightarrow$ existence d'une forme volume λ,
i.e. $\lambda \in \Omega^n(\mathcal{A})$ et $\lambda \neq 0$, sur M.

(2) $\mathcal{A} = \mathbf{F}[x_1, \dots, x_n]$ et $\mathbf{F}$ alg. clos.

$\Rightarrow \lambda = \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n$, forme volume.

La forme volume λ permet de définir une famille d'isomorphismes

$$\begin{array}{rccc} \star \ : & \mathfrak{X}^q(\mathcal{A}) & \to & \Omega^{n-q}(\mathcal{A}) \\ & Q & \mapsto & \imath_Q \lambda \end{array}$$

On définit alors la divergence :

$$\text{Div} : \mathfrak{X}^\bullet(\mathcal{A}) \to \mathfrak{X}^{\bullet-1}(\mathcal{A}),$$

qui rend le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X}^\bullet(\mathcal{A}) \arrow[r, "\star"] \arrow[d, dotted, "\text{Div}"'] & \Omega^{n-\bullet}(\mathcal{A}) \arrow[d, "\text{d}"] \\ \mathfrak{X}^{\bullet-1}(\mathcal{A}) \arrow[r, "\star"'] & \Omega^{n-\bullet+1}(\mathcal{A}) \end{tikzcd}$$

Définition : La dérivation (champ de vecteurs) $\text{Div}(\pi)$ est appelée le champ modulaire.

Variétés unimodulaires

(1) $\mathrm{Div}(\pi)$ est un 1-cocycle de Poisson.

(2) Pour une autre forme volume : $\mu = f\,\lambda$, avec $f \in \mathcal{A}$. (Si $\mathcal{A} = \mathbf{F}[x_1, \ldots, x_n]$, $\mathbf{F}$ alg. clos, f est une contante). Alors,

$$\mathrm{Div}_\mu(\pi) = \mathrm{Div}_\lambda(\pi) + \frac{1}{f}\delta_\pi(f).$$

<u>Dans les cadres considérés</u>, on a donc :

$$\boxed{\mathrm{Div}_\mu(\pi) = \mathrm{Div}_\lambda(\pi) + \delta_\pi(\ln f)},$$

$\Rightarrow$ La classe de $\mathrm{Div}_\lambda(\pi)$ <u>ne dépend pas de λ</u>.

On l'appelle la classe modulaire.
On dit que $(\mathcal{A}, \pi)$ est unimodulaire, si la classe modulaire est nulle.

(3) Si $(\mathcal{A}, \pi)$ est unimodulaire, il existe une forme volume λ avec

$$\mathrm{Div}_\lambda(\pi) = 0.$$

Dualité pour les variétés unimodulaires

Les égalités

$$\begin{array}{rcll} \star\,\mathsf{Div}(\pi) & = & \mathsf{d}\star\pi & (\text{déf. de Div}), \\ \partial^\pi\lambda & = & -\mathsf{d}\star\pi & (\text{déf. de } \partial^\pi), \\ \Big[[\imath_\pi, \mathsf{d}]\,, \imath_Q\Big] & = & \imath_{[\pi,Q]_S} & (\text{Cartan}) \end{array}$$

donnent :

$$(-1)^q\,\partial^\pi(\star Q) + \star\delta_\pi(Q) + \star\Big(\mathsf{Div}(\pi)\wedge Q\Big) = 0.$$

Donc, si $\mathcal{A}$ est unimodulaire, $\mathsf{Div}(\pi) = 0$ et on a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X}^\bullet(\mathcal{A}) \arrow[r, "\star"] \arrow[d, "\delta_\pi"'] & \Omega^{n-\bullet}(\mathcal{A}) \arrow[d, "\partial^\pi"] \\ \mathfrak{X}^{\bullet+1}(\mathcal{A}) \arrow[r, "\star"'] & \Omega^{n-1-\bullet}(\mathcal{A}) \end{tikzcd}$$

et donc :

$$\boxed{H^k(\mathcal{A}) \simeq H_{n-k}(\mathcal{A}), \quad 0 \leq k \leq n}.$$

Exemples

(1) (M^{2r}, ω), variété symplectique.
$\lambda = \omega^r$ forme volume.
π structure de Poisson canonique.

$$\boxed{\mathrm{Div}_\lambda(\pi) = 0}$$

$\Rightarrow$ Dualité.

(2) $\mathcal{A} = \mathbf{F}[x, y]$. $\lambda = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$.
Les structures de Poisson :

$$\pi = \psi \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y}, \qquad \psi \in \mathbf{F}[x, y].$$

$$\boxed{\mathrm{Div}_\lambda(\pi) = \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}},$$

les 1-cobords :

$$\delta_\pi(f) = \psi \left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} \right).$$

$\Rightarrow$ Classe modulaire jamais nulle!

Pas de dualité :

si ψ est homogène, sans facteur carré, les espaces de cohomologie de Poisson sont :

$$
\begin{aligned}
H^0(\mathbf{F}[x,y]) &\simeq \mathbf{F}, \\
H^1(\mathbf{F}[x,y]) &\simeq \mathbf{F}[x,y]_d \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} \right) \oplus \mathbf{F}\,\mathrm{Div}_\lambda(\pi), \\
H^2(\mathbf{F}[x,y]) &\simeq \mathbf{F}[x,y]_d\, \psi \oplus \frac{\mathbf{F}[x,y]}{\langle \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y} \rangle},
\end{aligned}
$$

où $\mathbf{F}[x,y]_d = \{$polynômes homogènes de degré $d = \mathrm{d}^\circ(\psi) - 2\}$.

Les espaces d'homologie de Poisson sont :

$$
\begin{aligned}
H_0(\mathbf{F}[x,y]) &\simeq \mathbf{F}[x,y]/\langle \psi \rangle, \\
H_1(\mathbf{F}[x,y]) &\simeq \langle x, y \rangle / \langle \psi \rangle, \\
H_2(\mathbf{F}[x,y]) &\simeq \{0\}.
\end{aligned}
$$

(3) $\mathcal{A} = \mathbf{F}[x,y,z]$, $\lambda = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$.

Pour une structure de Poisson

$$\pi = f_1 \frac{\partial}{\partial y} \wedge \frac{\partial}{\partial z} + f_2 \frac{\partial}{\partial z} \wedge \frac{\partial}{\partial x} + f_3 \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y},$$

$$\boxed{\mathrm{Div}(\pi) = \mathrm{Rot}\,(f_1, f_2, f_3)}.$$

$\varphi \in \mathbf{F}[x,y,z] \Rightarrow$ structure de Poisson :

$$\pi_\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \wedge \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \wedge \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y},$$

$$\boxed{\mathrm{Div}(\pi_\varphi) = \mathrm{Rot}\,(\nabla \varphi) = 0}.$$

$\Rightarrow$ Dualité pour $(\mathbf{F}[x,y,z], \pi_\varphi)$.

$\chi, \varphi \in \mathbf{F}[x,y,z] \Rightarrow$ autre structure de Poisson :

$$\pi_{\chi,\varphi} = \chi\, \pi_\varphi,$$

$$\boxed{\mathrm{Div}(\pi_{\chi,\varphi}) = \mathrm{Rot}\,(\chi\, \nabla \varphi) = \nabla \chi \times \nabla \varphi}.$$

1-cobords de Poisson :

$$\delta(f) = \chi\, \nabla f \times \nabla \varphi.$$

$\Rightarrow$ Classe modulaire non nulle.

(4) $\mathcal{A} = \mathbf{F}[x,y,z]/\langle\varphi\rangle$, $\varphi \in \mathbf{F}[x,y,z]$,

munie de π_φ.

Pas de forme volume.

Pas de dualité : si φ est homogène, et

$$\mathcal{A}_{sing} := \frac{\mathbf{F}[x,y,z]}{\langle \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\rangle} = \langle u_0, u_1, \ldots, u_{\mu-1}\rangle_{\mathbf{F}},$$

les espaces de <u>cohomologie</u> de Poisson sont :

$$\begin{aligned}
H^0(\mathcal{A}) &\simeq \mathbf{F}, \\
H^1(\mathcal{A}) &\simeq \bigoplus_{\mathrm{d}^\circ(u_j)=\mathrm{d}^\circ(\varphi)-3} \mathbf{F}\, u_j \,(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}), \\
H^2(\mathcal{A}) &\simeq \bigoplus_{\mathrm{d}^\circ(u_j)=\mathrm{d}^\circ(\varphi)-3} \mathbf{F}\, u_j\, \pi_\varphi, \\
H^3(\mathcal{A}) &\simeq \{0\}.
\end{aligned}$$

Les espaces d'<u>homologie</u> de Poisson :

$$\begin{aligned}
H_0(\mathcal{A}) &\simeq \mathcal{A}_{sing}, \\
H_1(\mathcal{A}) &\simeq \mathcal{A}_{sing}/\mathbf{F}, \\
H_2(\mathcal{A}) &\simeq \mathcal{A}_{sing}, \\
H_3(\mathcal{A}) &\simeq \mathcal{A}_{sing}.
\end{aligned}$$

Cohomologie de Poisson de $(\mathbf{F}[x,y,z],\pi_\varphi)$

$\varphi \in \mathbf{F}[x,y,z]$ est homogène, à singularité isolée.

On prend $u_0 = 1, u_1, \ldots, u_{\mu-1} \in \mathcal{A}$, dont les images dans $\mathcal{A}_{sing}$ forment une $\mathbf{F}$-base.

$$
\begin{aligned}
H^0(\mathcal{A}) &= \mathrm{Cas}(\mathcal{A}) = \bigoplus_{i\in\mathbf{N}} \mathbf{F}\varphi^i, \\
H^1(\mathcal{A}) &\simeq \begin{cases} \{0\} & \text{si} \quad \mathrm{d}^\circ(\varphi) \neq 3, \\ \mathrm{Cas}(\mathcal{A})\,\vec{e} & \text{si} \quad \mathrm{d}^\circ(\varphi) = 3, \end{cases} \\
\text{où } \vec{e} &= x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} \text{ est le champ d'Euler,} \\
H^3(\mathcal{A}) &\simeq \bigoplus_{i\in\mathbf{N}} \mathcal{A}_{sing}\,\varphi^i.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H^2(\mathcal{A}) \quad \simeq \quad & \bigoplus_{\substack{j=1 \\ \mathrm{d}^\circ(u_j) \neq \mathrm{d}^\circ(\varphi)-3}}^{\mu-1} \mathrm{Cas}(\mathcal{A})\, \nabla u_j \\
\oplus \quad & \bigoplus_{\substack{j=0 \\ \mathrm{d}^\circ(u_j) = \mathrm{d}^\circ(\varphi)-3}}^{\mu-1} \mathrm{Cas}(\mathcal{A})\, u_j \nabla \varphi \\
\oplus \quad & \bigoplus_{\substack{j=1 \\ \mathrm{d}^\circ(u_j) = \mathrm{d}^\circ(\varphi)-3}}^{\mu-1} \mathbf{F}\, \nabla u_j .
\end{aligned}
$$