Régularité d'anneaux de co-invariants quantiques et spectres de certaines déformations jordaniennes.

Laurent RIGAL

Introduction.

Ce texte contient un résumé détaillé de l'ensemble des travaux de recherche que j'ai effectués depuis la fin de ma thèse et qui composent le contenu du mémoire que je présente dans le but d'obtenir une *habilitation à diriger des recherches.* Les résultats correspondants se trouvent regroupés dans les références [R], [GLR], [DR], [LR(1)], [LR(2)], [KLR] et [LR(3)].

Le but de ce texte est de donner une présentation synthétique de ces travaux, visant à mettre en évidence les principaux résultats qu'ils contiennent, les motivations qui les sous-tendent et leurs liens avec les développements récents des domaines de recherche dans lesquels ils s'inscrivent. Pour un exposé complet incluant démonstrations et détails techniques, on renvoie le lecteur aux articles mentionnés ci-dessus, qu'il trouvera joints au présent volume.

Le cadre général des travaux présentés ici est l'étude de certaines déformations non commutatives d'algèbres de coordonnées sur des variétés algébriques. On aborde en particulier les déformations de type quantique ainsi que certaines déformations de type jordanien.

Les quatre premières sections de cette synthèse présentent l'étude de déformations quantiques de variétés quotient ou, plus précisément, de déformations quantiques d'anneaux de coordonnées de variétés quotient.

Commençons par quelques rappels. L'étude des anneaux d'invariants et en particulier de leurs propriétés de régularité est un thème central de l'algèbre commutative et de la géométrie algébrique, en lien avec l'étude des variétés algébriques quotient de représentations par un groupe réductif. Par *régularité*, on entend ici les propriétés de normalité ou les propriétés de nature homologique telles que la propriété de Gorenstein, de Cohen-Macaulay, *etc.* Un résultat fondamental dans cette direction a été obtenu par Hochster et Roberts en 1974 ; il assure que, si K est un corps algébriquement clos et si G est un groupe linéairement réductif sur K agissant linéairement sur $K[X_1, \dots, X_n]$, alors l'anneau des invariants $K[X_1, \dots, X_n]^G$ est Cohen-Macaulay (voir par exemple [BH ; p. 292]). Pour un aperçu succinct des problématiques majeures de la théorie des invariants, on pourra par exemple consulter le texte introductif de M. Hochster [H].

La théorie des groupes quantiques est apparue au début des années quatre-vingt et est en constant développement depuis. Pour des détails sur les origines de cette théorie et sur certains aspects de son développement, on pourra consulter la liste non exhaustive suivante de références : [D], [Ji], [FRT], [BG], [Jo], [K], [Ma] et [M]. Cette théorie fournit des déformations non commutatives naturelles d'anneaux de polynômes, ainsi que des coactions d'algèbres de Hopf sur ces déformations qui jouent le rôle des actions de groupes réductifs du cas commutatif. Ainsi, on dispose d'un cadre qui permet de développer une théorie d'invariants (ou plutôt de co-invariants) en situation quantique et donc de définir des variétés quotient quantiques. Les travaux présentés dans les quatre premières sections de ce mémoire s'attachent à l'étude de ces variétés quotient quantiques, du point de vue de la régularité.

Dans la première section, on définit la déformation quantique de l'anneau des coordonnées sur la variété des matrices de format $m \times n$, puis certaines algèbres qui lui sont naturellement associées : les anneaux déterminantiels quantiques et les grassmanniennes quantiques. Ce sont des anneaux non commutatifs, déformations à un paramètre q (du corps de base) qui *déforment* leurs analogues commutatifs au sens où, lorsque $q = 1$ (et sur un corps de base algébriquement clos), on retombe respectivement sur les anneaux de coordonnées de l'espace affine, des variétés déterminantielles et des grassmanniennes.

Dans la seconde section on montre que, comme dans le cas commutatif, ces déformations quantiques sont des *variétés quotient quantiques* au sens où ce sont des anneaux de co-invariants pour certaines coactions naturelles d'algèbres de Hopf sur des déformations d'anneaux de polynômes.

Dans la troisième section, on étudie ces algèbres du point de vue de la propriété d'ordre maximal. Rappelons que, pour un anneau noethérien non commutatif, la propriété d'ordre maximal est une généralisation naturelle de la propriété d'anneau normal du cas commutatif.

Dans la quatrième section, on s'intéresse aux propriétés de Cohen-Macaulay et de Gorenstein. Des travaux récents, dont une partie du contenu est rappelée dans la première sous-section, ont permis de définir les notions d'algèbres AS-Cohen-Macaulay et AS-Gorenstein (AS pour Artin-Schelter) pour les algèbres non commutatives graduées. Ces notions fournissent de très bons analogues non commutatifs aux propriétés de Cohen-Macaulay et de Gorenstein de l'algèbre commutative. Dans cette section, on définit et étudie une classe d'algèbres graduées, dite *algèbres graduées quantiques avec loi de redressement* et on montre en particulier que, sous certaines hypothèses, ces algèbres sont AS-Cohen-Macaulay. L'intérêt de cette classe d'algèbres est qu'elle contient les anneaux déterminantiels quantiques et les grassmanniennes quantiques (et, vraisemblablement, beaucoup d'autres variétés quotient quantiques), comme on le montre ensuite. On en déduit, en particulier, que les anneaux déterminantiels quantiques et les grassmanniennes quantiques sont AS-Cohen-Macaulay.

Dans la cinquième section, on aborde avec un point de vue différent le cas de la déformation jordanienne de l'anneau des coordonnées sur les matrices 2×2 et sur le groupe $SL(2)$. Ces algèbres sont apparues au début des années quatre-vingt-dix, par exemple dans les travaux de Woronowicz (voir [W]). Pour des précisions sur l'apparition de ces algèbres, on pourra consulter l'introduction de [DR]. Il s'agit ici de décrire en détail le spectre et le groupe des automorphismes de cette algèbre. L'étude des spectres d'algèbres quantiques a été initiée dans les travaux de Hodges, Levasseur et Joseph. Depuis lors, les déformations quantiques ont donné lieu à de nombreux travaux visant à décrire leur spectre par le biais d'une stratification (voir en particulier [BG]). Il s'avère, en effet, que les spectres d'algèbres quantiques peuvent être stratifiés de telle sorte que chaque strate soit homéomorphe au spectre d'un anneau commutatif. Le travail présenté ici décrit le spectre d'une déformation jordanienne au moyen d'une stratification et montre que le même type de phénomène persiste. On utilise ensuite cette description du spectre pour déterminer le groupe des automorphismes de la déformation jordanienne considérée. Il est à noter que la détermination du groupe des automorphismes d'un anneau de polynômes en trois indéterminées ou plus est un problème largement ouvert. A l'opposé, pour la plupart des déformations quantiques d'anneaux de polynômes, le groupe des automorphismes est très petit et facilement descriptible. Le travail présenté ici met en évidence que les déformations jordaniennes sont intermédiaires entre le cas commutatif et le cas quantique : leur groupe d'automorphismes est beaucoup plus riche que celui du cas quantique mais reste accessible, contrairement au cas commutatif.

Dans tout ce qui suit, $\Bbbk$ est un corps commutatif. Dans les sections 1, 2, 3 et 4, q désigne un élément de $\Bbbk^*$.

1 Définition de certaines algèbres quantiques.

Dans cette section, on commence par définir les algèbres qui sont l'objet essentiel des résultats des sections 2, 3 et 4. Sauf mention expresse du contraire, les résultats ci-dessous sont démontrés dans [PW], où l'on trouve une étude très détaillée des algèbres en question. On peut aussi consulter [NYM] pour certains compléments.

Le théorème 1.1, qui figure en fin de section, est issu de [LR(1)] et [KLR]. Il détermine la dimension (de Gelfand-Kirillov) des algèbres étudiées dans les présents travaux.

Pour $m, n \in \mathbb{N}^*$, $M_{m,n}(\Bbbk)$ désigne l'ensemble des matrices de format $m \times n$ à coefficients dans $\Bbbk$. On pose $M_n(\Bbbk) = M_{n,n}(\Bbbk)$ et $GL_n(\Bbbk)$ (resp. $SL_n(\Bbbk)$) désigne le groupe général linéaire (resp. spécial linéaire) correspondant.

Algèbre des matrices quantiques. Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. La *quantification de l'anneau des coordonnées sur la variété* $M_{m,n}(\Bbbk)$, notée $\mathcal{O}_q(M_{m,n}(\Bbbk))$, est la $\Bbbk$-algèbre engendrée par mn indéterminées X_{ij}, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ assujetties aux relations :

$$\begin{array}{ll} X_{ij}X_{il} = qX_{il}X_{ij}, & \text{pour } 1 \leq i \leq m, \text{ et } 1 \leq j < l \leq n\,; \\ X_{ij}X_{kj} = qX_{kj}X_{ij}, & \text{pour } 1 \leq i < k \leq m, \text{ et } 1 \leq j \leq n\,; \\ X_{ij}X_{kl} = X_{kl}X_{ij}, & \text{pour } 1 \leq k < i \leq m, \text{ et } 1 \leq j < l \leq n\,; \\ X_{ij}X_{kl} - X_{kl}X_{ij} = (q - q^{-1})X_{il}X_{kj}, & \text{pour } 1 \leq i < k \leq m, \text{ et } 1 \leq j < l \leq n. \end{array}$$

Pour simplifier, on l'appellera souvent algèbre des matrices quantiques $m \times n$.

La matrice $\mathbf{X} = (X_{ij})$, de format $m \times n$, est appelée matrice générique associée à $\mathcal{O}_q(M_{m,n}(\Bbbk))$.

Soit $t \in \mathbb{N}$, $1 \leq t \leq \min\{m, n\}$. A un couple (I, J), où $I = \{i_1 < \ldots < i_t\} \subseteq \{1, \ldots, m\}$ et $J = \{j_1 < \ldots < j_t\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$, on associe le *mineur quantique* $t \times t$ de $\mathbf{X}$, noté $[I|J]$, et défini par

$$[I|J] = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_t} (-q)^{\ell(\sigma)} X_{i_{\sigma(1)}j_1} \ldots X_{i_{\sigma(t)}j_t}.$$

(Bien sûr, $\mathfrak{S}_t$ est le groupe symétrique de $\{1, \ldots, t\}$ et ℓ est la fonction longueur usuelle sur $\mathfrak{S}_t$.)

Un mineur quantique est dit maximal si $t = \min\{m, n\}$. Dans ce cas, si $m \leq n$, on a $I = \{1, \ldots, m\}$ et on le note plus simplement $[J]$.

Anneaux déterminantiels quantiques. Pour $t \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{I}_t$ l'idéal de $\mathcal{O}_q(M_{m,n}(\Bbbk))$ engendré par les mineurs quantiques $t \times t$ (avec la convention que $\mathcal{I}_t = (0)$ si $t > \min\{m, n\}$). Alors, les *anneaux déterminantiels quantiques* sont les anneaux $\mathcal{O}_q(M_{m,n}(\Bbbk))/\mathcal{I}_t$.

Grassmanniennes quantiques. Supposons $m \leq n$. La *quantification de l'anneau des coordonnées homogènes sur la grassmannienne des sous-espaces de dimension m dans* $\Bbbk^n$, notée $\mathcal{O}_q(G_{m,n}(\Bbbk))$, est la sous-algèbre de $\mathcal{O}_q(M_{m,n}(\Bbbk))$ engendrée par les mineurs quantiques maximaux de la matrice générique associée à $\mathcal{O}_q(M_{m,n}(\Bbbk))$. Pour simplifier, on l'appellera souvent grassmannienne quantique.

Groupes quantiques linéaires. Si $m = n$, on pose $\mathcal{O}_q(M_{m,n}(\Bbbk)) = \mathcal{O}_q(M_n(\Bbbk))$. L'unique mineur quantique maximal de $\mathcal{O}_q(M_n(\Bbbk))$ est alors noté $\det_q \mathbf{X}$ et c'est un élément central de $\mathcal{O}_q(M_n(\Bbbk))$. On peut donc localiser $\mathcal{O}_q(M_n(\Bbbk))$ en les puissances de $\det_q \mathbf{X}$ et l'on pose $\mathcal{O}_q(GL_n(\Bbbk)) = \mathcal{O}_q(M_n(\Bbbk))[(\det_q \mathbf{X})^{-1}]$. On pose par ailleurs $\mathcal{O}_q(SL_n(\Bbbk)) = \mathcal{O}_q(M_n(\Bbbk))/(\det_q \mathbf{X} - 1)$. Les algèbres $\mathcal{O}_q(GL_n(\Bbbk))$ et $\mathcal{O}_q(SL_n(\Bbbk))$ sont des algèbres de Hopf, analogues non commutatifs des anneaux de coordonnées sur les groupes algébriques $GL_n(\Bbbk)$ et $SL_n(\Bbbk)$.

Il est clair que si $q = 1$, les $\Bbbk$-algèbres définies ci-dessus sont commutatives. Si de plus $\Bbbk$ est supposé algébriquement clos, ce sont les anneaux de coordonnées des variétés (affines ou projectives) correspondantes. C'est ce fait, bien sûr, qui justifie le nom de *déformation d'anneaux de coordonnées* qu'on leur donne. Dans la suite, lorsque q est égal à 1, on ne le mentionne pas, pour se conformer à la notation commutative. Ainsi, $\mathcal{O}(M_{m,n}(\Bbbk)) = \mathcal{O}_1(M_{m,n}(\Bbbk))$ *etc.*

Dimension des algèbres étudiées. On termine cette section en donnant les dimensions de Gelfand-Kirillov des algèbres définies ci-dessus. Rappelons que, d'après [GL(1) ; §2], pour $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq t \leq \min\{m, n\}$, l'idéal $\mathcal{I}_t$ de $\mathcal{O}_q(M_{m,n}(\Bbbk))$ est complètement premier (voir aussi le théorème 2.1 ci-après).

Théorème 1.1 – [LR(1) ; Corollary 5] et [KLR ; Proposition 2.9]
Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq t \leq \min\{m, n\}$.
(i) L'idéal $\mathcal{I}_t$ est de hauteur $(m - t + 1)(n - t + 1)$.
(ii) La dimension de Gelfand-Kirillov de $\mathcal{O}_q(M_{m,n}(\Bbbk))/\mathcal{I}_t$ est $mn - (m - t + 1)(n - t + 1)$.
(iii) Si $m \leq n$, la dimension de Gelfand-Kirillov de $\mathcal{O}_q(G_{m,n}(\Bbbk))$ est $m(n - m) + 1$.

Notons que les points (ii) et (iii) du théorème 1.1 peuvent aussi se déduire de certains résultats de la section 4. Cependant, la méthode utilisée dans [LR(1)], qui consiste à exhiber une famille d'idéaux premiers de $\mathcal{O}_q(M_{m,n}(\Bbbk))$, présente un intérêt en soi. Elle permet, notamment, de calculer la hauteur des idéaux déterminantiels quantiques.

2 Liens avec une théorie de (co-)invariants.

Les travaux présentés dans cette section sont issus de [GLR] et [KLR]. Ils montrent que les anneaux déterminantiels quantiques et les grassmanniennes quantiques sont des anneaux de co-invariants pour certaines coactions d'algèbres de Hopf.

Dans cette section, on fixe des entiers strictement positifs m, n, t.

Commençons par quelques rappels du cas commutatif. Il est bien connu que l'anneau déterminantiel $\mathcal{O}(M_{m,n}(\Bbbk))/\mathcal{I}_{t+1}$ s'identifie à l'anneau des invariants pour une certaine action du groupe $GL_t(\Bbbk)$ sur l'anneau de polynômes $\mathcal{O}(M_{m,t}(\Bbbk)) \otimes \mathcal{O}(M_{t,n}(\Bbbk))$. De même, pour $m \leq n$, l'anneau $\mathcal{O}(G_{m,n}(\Bbbk))$ est l'anneau des invariants pour une certaine action du groupe $SL_m(\Bbbk)$ sur l'anneau de polynômes $\mathcal{O}(M_{m,n}(\Bbbk))$. (Plus précisément, ces anneaux sont les anneaux d'invariants absolus pour les actions en question. Mais, les notions d'invariants et d'invariants absolus coïncident dès que le corps $\Bbbk$ est infini.) Pour des détails concernant ces résultats, on pourra consulter par exemple [BV ; Chap. 7], et en particulier les théorèmes 7.6 et 7.7.

Le contenu de cette section montre que ces résultats s'étendent en situation quantique. Bien sûr, il faut remplacer les actions de groupes par des coactions d'algèbres de Hopf et substituer à la notion d'invariant son analogue dans ce contexte : la notion de co-invariant.

On rappelle que, si H est une algèbre de Hopf et V un H-comodule à gauche pour la coaction $\gamma : V \longrightarrow H \otimes V$, un élément v de V est appelé co-invariant si $\gamma(v) = 1 \otimes v$. L'ensemble des co-invariants est alors noté $V^{\mathrm{co}\,H}$.

Rappelons que l'action standard de $GL_t(\Bbbk)$ sur $V := M_{m,t}(\Bbbk) \times M_{t,n}(\Bbbk)$ est donnée par

$$\begin{array}{rcccl} \gamma & : & GL_t(\Bbbk) \times V & \longrightarrow & V \\ & & (g,(A,B)) & \mapsto & (Ag^{-1}, gB) \end{array} .$$

Cette action induit une action de $GL_t(\Bbbk)$ sur l'anneau de polynômes en $t(m+n)$ indéterminées $\mathcal{O}(M_{m,t}(\Bbbk)) \otimes \mathcal{O}(M_{t,n}(\Bbbk))$. Dans [DP], De Concini et Procesi ont donné une description complète de l'anneau des invariants pour cette action, sans restriction sur la caractéristique de $\Bbbk$. L'anneau des invariants est un anneau déterminantiel. Pour un résumé détaillé de la méthode que ces auteurs utilisent, on pourra aussi consulter l'introduction de [GLR].

La coaction γ_q^* étudiée dans [GLR] et décrite ci-dessous est un analogue quantique naturel de γ. La méthode utilisée dans [GLR] pour calculer l'algèbre des co-invariants pour cette coaction s'inspire de la méthode utilisée dans le cas classique par De Concini et Procesi.

Quantification de l'action standard de $GL_t(\Bbbk)$ sur $V := M_{m,t}(\Bbbk) \times M_{t,n}(\Bbbk)$. Dans la suite, les générateurs canoniques de $\mathcal{O}_q(M_{m,n}(\Bbbk))$, $\mathcal{O}_q(M_{m,t}(\Bbbk))$, $\mathcal{O}_q(M_{t,n}(\Bbbk))$ et $\mathcal{O}_q(GL_t(\Bbbk))$ seront respectivement notés X_{ij}, Y_{ij}, Z_{ij} et T_{ij}. En outre, on pose $\mathcal{O}_q(V) = \mathcal{O}_q(M_{m,t}(\Bbbk)) \otimes \mathcal{O}_q(M_{t,n}(\Bbbk))$.

Le morphisme d'algèbres ρ_q^* (resp. λ_q^*) ci-dessous définit une structure de $\mathcal{O}_q(GL_t(\Bbbk))$-comodule algèbre à droite (resp. à gauche) sur $\mathcal{O}_q(M_{m,t}(\Bbbk))$ (resp. $\mathcal{O}_q(M_{t,n}(\Bbbk))$), où :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_q(M_{m,t}(\Bbbk)) & \stackrel{\rho_q^*}{\to} & \mathcal{O}_q(M_{m,t}(\Bbbk)), \otimes \mathcal{O}_q(GL_t(\Bbbk)), \\ Y_{ij} & \mapsto & \sum_{k=1}^t Y_{ik} \otimes T_{kj} \end{array} \quad \begin{array}{rcl} \mathcal{O}_q(M_{t,n}(\Bbbk)) & \stackrel{\lambda_q^*}{\to} & \mathcal{O}_q(GL_t(\Bbbk)) \otimes \mathcal{O}_q(M_{t,n}(\Bbbk)) \\ Z_{ij} & \mapsto & \sum_{k=1}^t T_{ik} \otimes Z_{kj} \end{array} .$$

Dans un tel contexte, on peut définir une coaction à gauche de $\mathcal{O}_q(GL_t(\Bbbk))$ sur $\mathcal{O}_q(V) = \mathcal{O}_q(M_{m,t}(\Bbbk)) \otimes \mathcal{O}_q(M_{t,n}(\Bbbk))$ en suivant la procédure générale décrite en [GLR ; §1]. L'application qui définit cette coaction est alors

$$\gamma_q^* \;:\; \mathcal{O}_q(V) \longrightarrow \mathcal{O}_q(GL_t(\Bbbk)) \otimes \mathcal{O}_q(V) ,$$

définie comme suit. Pour $a \in \mathcal{O}_q(M_{m,t}(\Bbbk))$ et $b \in \mathcal{O}_q(M_{t,n}(\Bbbk))$, on pose $\rho_q^*(a) = \sum_{(a)} a_0 \otimes a_1$ et $\lambda_q^*(b) = \sum_{(b)} b_{-1} \otimes b_0$. On a alors :

$$\gamma_q^*(a \otimes b) = \sum_{(a),(b)} S(a_1) b_{-1} \otimes (a_0 \otimes b_0) .$$

(On utilise les notations de Sweedler et S désigne l'antipode de $\mathcal{O}_q(GL_t(\Bbbk))$.)

Il convient de remarquer que γ_q^* n'est pas, en général, un morphisme d'algèbres. Il n'est donc pas clair *a priori* que l'ensemble des co-invariants, $\mathcal{O}_q(V)^{\mathrm{co}\,\mathcal{O}_q(GL_t(\Bbbk))}$, de γ_q^* soit une sous-algèbre de $\mathcal{O}_q(V)$. Cependant, c'est le cas comme le montre [GLR ; Prop. 1.1].

Pour déterminer les co-invariants de γ_q^*, on est amené à considérer les morphismes d'algèbres définis ci-dessous. On considère d'abord le morphisme d'algèbres :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_q(M_{m,n}(\Bbbk)) & \to & \mathcal{O}_q(M_{m,t}(\Bbbk)) \otimes \mathcal{O}_q(M_{t,n}(\Bbbk)) \\ X_{ij} & \mapsto & \sum_{k=1}^t Y_{ik} \otimes Z_{kj} \end{array}.$$

On voit facilement que $\mathcal{I}_{t+1}$ est dans son noyau, d'où un morphisme d'algèbres :

$$\mu_q^* : \mathcal{O}_q(M_{m,n}(\Bbbk))/\mathcal{I}_{t+1} \longrightarrow \mathcal{O}_q(M_{m,t}(\Bbbk)) \otimes \mathcal{O}_q(M_{t,n}(\Bbbk)).$$

Le morphisme μ_q^* a été étudié par Goodearl et Lenagan dans [GL(1)]. Dans [GL(1) ; §2], le résultat suivant (théorème 2.1) est démontré à l'aide d'une certaine base, dite *base préférée* de $\mathcal{O}_q(M_{m,n}(\Bbbk))$, définie et étudiée dans [GL(1)]. Cette base est aussi utilisée dans [GLR] et [KLR] pour prouver les résultats ci-après. Elle est une variante des bases standards qui seront définies à la section 4 dans le contexte des algèbres graduées quantiques avec loi de redressement.

Théorème 2.1 – *Le morphisme μ_q^* est injectif.*

La description complète de l'algèbre de co-invariants $\mathcal{O}_q(V)^{\mathrm{co}\,\mathcal{O}_q(GL_t(\Bbbk))}$ est alors obtenue grâce au théorème suivant, résultat essentiel de [GLR] (voir [GLR ; Theorem 4.5).

Théorème 2.2 – *On a $\mathcal{O}_q(V)^{\mathrm{co}\mathcal{O}_q(GL_t(\Bbbk))} = \mathrm{Im}\,\mu_q^* \cong \mathcal{O}_q(M_{m,n}(\Bbbk))/\mathcal{I}_{t+1}$.*

Ainsi, les théorèmes 2.2 et 2.1 sont des analogues quantiques du premier et du second théorème fondamental de la théorie des invariants pour l'action γ. Ils montrent que l'anneau déterminantiel $\mathcal{O}_q(M_{m,n}(\Bbbk))/\mathcal{I}_{t+1}$ s'identifie à l'anneau des co-invariants de la coaction γ_q^*.

On définit, à présent, certaines coactions de l'algèbre de Hopf $\mathcal{O}_q(SL_t(\Bbbk))$ sur des anneaux de matrices quantiques. Elles permettent de montrer que les grassmanniennes quantiques sont des anneaux de co-invariants.

Puisque l'algèbre de Hopf $\mathcal{O}_q(SL_t(\Bbbk))$ est un quotient de $\mathcal{O}_q(GL_t(\Bbbk))$, la coaction à gauche γ_q^* de $\mathcal{O}_q(GL_t(\Bbbk))$ sur $\mathcal{O}_q(V)$ induit une coaction à gauche Γ_q^* de $\mathcal{O}_q(SL_t(\Bbbk))$ sur $\mathcal{O}_q(V)$. Si $\pi : \mathcal{O}_q(GL_t(\Bbbk)) \longrightarrow \mathcal{O}_q(SL_t(\Bbbk))$ désigne la projection canonique, on a :

$$\Gamma_q^* : \mathcal{O}_q(V) \xrightarrow{\gamma_q^*} \mathcal{O}_q(GL_t(\Bbbk)) \otimes \mathcal{O}_q(V) \xrightarrow{\pi\otimes\mathrm{id}} \mathcal{O}_q(SL_t(\Bbbk)) \otimes \mathcal{O}_q(V).$$

Le résultat suivant décrit l'algèbre de co-invariants pour cette coaction.

Théorème 2.3 – [GLR ; Theorem 6.6]
Soient $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ les sous-algèbres respectives de $\mathcal{O}_q(M_{m,t}(\Bbbk))$ et $\mathcal{O}_q(M_{t,n}(\Bbbk))$ engendrées par les mineurs quantiques $t\times t$. La sous-algèbre des co-invariants de Γ_q^* dans $\mathcal{O}_q(V)$ est la sous-algèbre engendrée par $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ et $\mathrm{Im}\,\mu_q^*$. Plus précisément,

$$(\mathcal{O}_q(M_{m,t}(\Bbbk)) \otimes \mathcal{O}_q(M_{t,n}(\Bbbk)))^{\mathrm{co}\,\mathcal{O}_q(SL_t(\Bbbk))} = (\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2).\mathrm{Im}\,\mu_q^*.$$

De même, la coaction à gauche λ_q^* induit une coaction à gauche Λ_q^* de $\mathcal{O}_q(SL_t(\Bbbk))$ sur $\mathcal{O}_q(M_{t,n}(\Bbbk))$. On a alors le résultat suivant, qui se déduit du théorème 2.3.

Corollaire 2.4 – [KLR ; Theorem 5.2]
Pour $t \leq n$, la sous-algèbre des Λ_q^*-co-invariants est $\mathcal{O}_q(M_{t,n}(\Bbbk))^{\mathrm{co}\mathcal{O}_q(SL_t(\Bbbk))} = \mathcal{O}_q(G_{t,n}(\Bbbk))$.

Compléments bibliographiques. Pour des travaux récents sur les algèbres de co-invariants, on pourra consulter par exemple [DL(1)], [DL(2)], [GL(2)] et [FH].

3 Normalité.

Les résultats de cette section sont issus de [R], [LR(2)] et [KLR]. On y étudie les anneaux déterminantiels quantiques et les grassmanniennes quantiques du point de vue de la normalité (au sens non commutatif), c'est-à-dire du point de vue de la propriété d'ordre maximal.

Pour un traitement très complet de la notion d'ordre maximal, on renvoie le lecteur au livre de Maury et Raynaud [MR] et au Chapitre 5 de [McCR]. Voici néanmoins quelques brefs rappels à propos de cette notion, dans le contexte où elle nous intéresse. Soit R un anneau noethérien intègre dont on note Q le corps de fractions. Alors, on dit que R est un ordre maximal de Q si la condition suivante est satisfaite : si T est un anneau tel que $R \subseteq T \subseteq Q$ et tel qu'il existe des éléments non nuls $a, b \in R$ avec $aTb \subseteq R$, alors $T = R$. Cette condition est un analogue non commutatif naturel de la normalité pour les anneaux intègres (voir [McCR ; Section 5.1]). Dans cette section, on s'intéresse à la condition d'ordre maximal pour les anneaux déterminantiels quantiques et les grassmanniennes quantiques. Rappelons que les anneaux déterminantiels quantiques sont intègres (voir théo. 2.1) et que les grassmanniennes quantiques le sont comme sous-algèbres des algèbres intègres $\mathcal{O}_q(M_{m,n}(\Bbbk))$.

Il est bien connu que, si A est un anneau intègre normal et G un groupe qui agit sur A par automorphismes d'anneaux, alors l'anneau A^G des invariants est normal. C'est en fait un résultat élémentaire. Ainsi, la normalité des anneaux déterminantiels et des anneaux de coordonnées sur les grassmanniennes se déduit immédiatement du fait qu'ils sont les anneaux d'invariants pour l'action d'un groupe sur un anneau de polynômes. Cependant, la propriété ci-dessus ne s'étend pas au cas où l'anneau A n'est pas commutatif. On ne peut donc pas appliquer les résultats de la section précédente pour conclure que les anneaux déterminantiels quantiques et les grassmanniennes quantiques sont des ordres maximaux de leur corps de fractions. C'est pourquoi on est amené à montrer directement ces résultats.

Le lemme suivant est utilisé pour montrer la proposition 3.2 et le théorème 3.3. Il généralise un résultat standard d'algèbre commutative.

Lemme 3.1 – [R ; Lemme 1.1]
Soit R un anneau noethérien intègre et $Q = \mathrm{Frac}\, R$ son corps de fractions. On suppose qu'il existe un élément normal non nul x de R tel que :
(1) $xR = \cap_{i=1}^{r} \mathfrak{p}_i$ où, pour $i \in \{1, \dots, r\}$, $\mathfrak{p}_i$ est un idéal complètement premier de R et
(2) le localisé R_x de R en les puissances de x est un ordre maximal de Q.
Enfin, on note τ l'automorphisme de R associé à x (par $ax = x\tau(a)$ pour tout $a \in R$). Dans ces conditions, si $\tau(\mathfrak{p}_i) \subseteq \mathfrak{p}_i$ pour $i \in \{1, \dots, r\}$, alors R est un ordre maximal de Q.

Le lemme 3.1 permet donc de déduire la normalité d'un anneau de celle d'un de ses localisés, si toutefois on localise suivant les puissances d'un élément normal ayant de bonnes propriétés. Par exemple, si x est un élément normal de l'anneau noethérien intègre R et si x engendre un idéal complètement premier, alors R est un ordre maximal si R_x en est un.

On a d'abord le résultat suivant, qui concerne le cas du quotient de $\mathcal{O}_q(M_{m,n}(\Bbbk))$ par l'idéal des mineurs 2×2.

Proposition 3.2 – [R ; Théorème 2.3.11]
Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$; l'anneau $\mathcal{O}_q(M_{m,n}(\Bbbk))/\mathcal{I}_2$ est un ordre maximal de son corps de fractions.

Le cas des quotients de $\mathcal{O}_q(M_{m,n}(\Bbbk))$ par l'idéal des mineurs $t \times t$, $t > 2$ est traité dans l'énoncé ci-dessous. La démonstration du théorème 3.3 utilise la proposition 3.2.

Théorème 3.3 – [LR(2) ; Theorem 3.2]
Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\Bbbk = \mathbb{C}$ et que q est un élément de $\mathbb{C}$ transcendant sur $\mathbb{Q}$. Soit t un entier tel que $1 \leq t \leq \min\{m, n\}$. Alors $\mathcal{O}_q(M_{m,n}(\Bbbk))/\mathcal{I}_t$ est un ordre maximal de son corps de fractions.

La restriction au cas où $\Bbbk = \mathbb{C}$ et q est un élément de $\mathbb{C}$ transcendant sur $\mathbb{Q}$ tient à la raison suivante. Pour montrer ce résultat, on utilise le lemme 3.1 dans le contexte mentionné juste après son énoncé. Plus précisément, on est amené à utiliser le fait que, si $t \geq 3$, l'élément $X_{1n} + \mathcal{I}_t$ de $\mathcal{O}_q(M_{m,n}(\Bbbk))/\mathcal{I}_t$ engendre un idéal complètement premier. Ce résultat figure dans les travaux de Launois (voir [La]) sous l'hypothèse que $\Bbbk = \mathbb{C}$ et si q est transcendant sur $\mathbb{Q}$. Il est cependant vraisemblable que ce résultat de Launois s'étende à tout corps $\Bbbk$ et tout $q \in \Bbbk^*$ (mais ce n'est pas évident). Si c'est le cas, la méthode développée dans [LR(2)] montre que le théorème 3.3 reste vrai sans restriction, ni sur $\Bbbk$, ni sur q.

Ce qui suit concerne le cas des grassmanniennes quantiques.

Proposition 3.4 – [KLR ; Proposition 6.1]
Soit R un anneau noethérien intègre et $Q = \mathrm{Frac}\, R$ son corps de fractions. On suppose qu'il existe deux éléments normaux non nuls a, b de R tels que R_a et R_b soient des ordres maximaux de leur corps de fractions, b soit régulier à gauche modulo (a) et $ab = \lambda ba$ pour λ élément central inversible de R. Alors, R est un ordre maximal de son corps de fractions.

Cette proposition s'applique au cas des grassmanniennes quantiques. En fait, l'argument essentiel pour déduire le théorème 3.5 de la proposition 3.4 est qu'il existe des localisations de $\mathcal{O}_q(G_{m,n}(\Bbbk))$ par des éléments normaux qui sont isomorphes à des extensions de Öre d'anneaux de matrices quantiques. C'est ce que montre l'application de deshomogénéisation de [KLR ; Corollary 4.4]. Cette application sera de nouveau utilisée à la section 4.

Théorème 3.5 – [KLR ; Theorem 6.2]
Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $m \leq n$. L'anneau $\mathcal{O}_q(G_{m,n}(\Bbbk))$ est un ordre maximal de son corps de fractions.

4 La propriété AS-Cohen-Macaulay.

Hormis ceux de la première sous-section, tous les résultats de cette section sont issus de [LR(3)] sauf mention expresse du contraire.

On s'intéresse à présent à l'étude des anneaux déterminantiels quantiques et des grassmanniennes quantiques du point de vue des propriétés de AS-Cohen-Macaulay et AS-Gorenstein. Ces propriétés ont été définies et largement étudiées dans des travaux récents liés au développement de la *géométrie algébrique non-commutative* (voir [Sta]). Il s'agit de propriétés de régularité de nature homologique. Elle sont définies pour les algèbres $\mathbb{N}$-graduées et fournissent des généralisations naturelles des propriétés de Cohen-Macaulay et de Gorenstein de l'algèbre commutative et de la géométrie algébrique.

On montre que les anneaux déterminantiels quantiques et les grassmanniennes quantiques sont AS-Cohen-Macaulay. On détermine aussi, parmi ces anneaux, ceux qui sont AS-Gorenstein.

Rappelons quelques points du cas classique. Supposons d'abord $\mathbb{k}$ algébriquement clos et de caractéristique nulle. Alors, les groupes $GL_t(\mathbb{k})$ et $SL_t(\mathbb{k})$ sont linéairement réductifs. Comme en outre les anneaux de coordonnées $\mathcal{O}(M_{m,n}(\mathbb{k}))/\mathcal{I}_t$ et $\mathcal{O}(G_{t,n}(\mathbb{k}))$ sont des anneaux d'invariants pour l'action de $GL_t(\mathbb{k})$ et $SL_t(\mathbb{k})$ respectivement, le théorème de Hochster et Roberts (rappelé en introduction) assure que ces anneaux sont Cohen-Macaulay. En fait, cette propriété reste vraie sur un corps commutatif quelconque. Pour le montrer, on peut utiliser la théorie des algèbres avec loi de redressement, initiée dans les travaux de De Concini, Eisenbud et Procesi (voir [E] et [DEP]). Pour un exposé détaillé sur cette théorie, ses origines et son développement, on peut consulter [BV] ou le chapitre 7 de [BH].

Le point de vue développé dans [LR(3)] pour montrer que les propriétés de régularité des anneaux $\mathcal{O}(M_{m,n}(\mathbb{k}))/\mathcal{I}_t$ et $\mathcal{O}(G_{t,n}(\mathbb{k}))$ s'étendent au cas quantique consiste à définir une notion d'algèbre avec loi de redressement en situation quantique. On montre que, sous certaines hypothèses, les algèbres de cette classe sont AS-Cohen-Macaulay. On montre ensuite que les anneaux déterminantiels quantiques et les grassmanniennes quantiques sont des exemples de telles algèbres, ce qui permet de conclure qu'elles sont AS-Cohen-Macaulay.

4.1 Rappels sur la propriété de AS-Cohen-Macaulay.

Les résultats regroupés dans cette sous-section sont des rappels sur les propriétés de AS-Cohen-Macaulay et AS-Gorenstein ; ils sont essentiellement issus de [JZ], [YZ] et [Z].

Dans cette sous-section, $A = \oplus_{i \geq 0} A_i$ désigne une $\mathbb{k}$-algèbre noethérienne $\mathbb{N}$-graduée connexe (c'est-à-dire que $A_0 = \mathbb{k}$). Il s'ensuit que A est de type fini, et localement finie au sens où A_n est un $\mathbb{k}$-espace vectoriel de dimension finie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_{\geq n} = \oplus_{i \geq n} A_i$. On note $\mathfrak{m}$ l'unique idéal maximal homogène de A : $\mathfrak{m} = A_{\geq 1}$. La catégorie des A-modules à gauche gradués et des morphismes homogènes de degré zéro est notée $\mathsf{GrMod}(A)$. Si $M = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$ est un objet de $\mathsf{GrMod}(A)$, pour $n \in \mathbb{Z}$, le module gradué $M(n)$ est le n-ième translaté de M : $M(n) = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} M(n)_i$ où $M(n)_i = M_{n+i}$ pour $i \in \mathbb{Z}$. Si M, N sont des objets de $\mathsf{GrMod}(A)$, on note $\mathrm{Hom}_{\mathsf{GrMod}(A)}(M, N)$ le groupe abélien des morphismes homogènes de degré 0. Les groupes Ext associés à $\mathrm{Hom}_{\mathsf{GrMod}(A)}$ sont alors notés $\mathrm{Ext}^i_{\mathsf{GrMod}(A)}$. En outre, on pose

$$\underline{\mathrm{Hom}}_A(M, N) := \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathsf{GrMod}(A)}(M, N(m)).$$

Les groupes Ext associés à $\underline{\mathrm{Hom}}_A$ sont alors notés $\underline{\mathrm{Ext}}^i_A$. Ainsi, si M, N sont des objets de $\mathsf{GrMod}(A)$,

$$\underline{\mathrm{Ext}}^i_A(M, N) \cong \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \mathrm{Ext}^i_{\mathsf{GrMod}(A)}(M, N(m)).$$

On peut définir, à présent, des foncteurs de cohomologie locale. Si M est un objet de $\mathsf{GrMod}(A)$, on définit son sous-module de torsion $\Gamma_{\mathfrak{m}}(M)$ par

$$\Gamma_{\mathfrak{m}}(M) := \{m \in M \mid \exists n \in \mathbb{N},\ A_{\geq n} m = 0\}.$$

Il est facile de vérifier que $\Gamma_{\mathfrak{m}}$ (et la restriction des morphismes) définit un foncteur exact à gauche ; les foncteurs dérivés à droite qui lui sont associés sont alors notés $H^i_{\mathfrak{m}}$. Ainsi, si M est un objet de $\mathsf{GrMod}(A)$, on a

$$H^i_{\mathfrak{m}}(M) \cong \varinjlim \underline{\mathrm{Ext}}^i_A(A/A_{\geq n}, M).$$

On note A° l'algèbre opposée de A. Bien sûr, A° est aussi un $\Bbbk$-algèbre noethérienne $\mathbb{N}$-graduée connexe et, pour $i \in \mathbb{N}$, le i-ième foncteur de cohomologie locale associé à A° est noté $H^i_{\mathfrak{m}^\circ}$.

Définition 4.1.1 – [JZ; Definition 0.1, Definition 0.2].
On dit que A est AS-Cohen-Macaulay *si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que*

$$\forall i \in \mathbb{N},\, i \neq n,\, H^i_{\mathfrak{m}}(A) = H^i_{\mathfrak{m}^\circ}(A) = 0.$$

On dit que A est AS-Gorenstein *si elle satisfait aux conditions suivantes.*
(1) On a $\mathrm{injdim}_A A = \mathrm{injdim}_{A^\circ} A = n < \infty$.
(2) Il existe un entier ℓ tel que

$$\underline{\mathrm{Ext}}^i_A(\Bbbk, A) \cong \underline{\mathrm{Ext}}^i_{A^\circ}(\Bbbk, A) \cong \begin{cases} 0 & \textit{pour } i \neq n, \\ \Bbbk(\ell) & \textit{pour } i = n. \end{cases}$$

(Notons que, d'après [L; Lemma 3.3], dans la définition de la propriété AS-Gorenstein, on peut indifféremment utiliser la dimension injective usuelle ou la dimension injective graduée.)

Définition 4.1.2 – *Si M est un A-module à gauche gradué de type fini, la profondeur de M est définie par*

$$\mathrm{depth}\,_A M = \inf\{i \in \mathbb{N} \mid \underline{\mathrm{Ext}}^i_A(\Bbbk, M) \neq 0\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}.$$

Le résultat suivant est facile à montrer.

Lemme 4.1.3 – *Si M est un A-module à gauche gradué de type fini, alors*

$$\mathrm{depth}\,_A M = \inf\{i \in \mathbb{N} \mid H^i_{\mathfrak{m}}(M) \neq 0\}.$$

La définition suivante provient de [Z; p. 392].

Définition 4.1.4 – *Soit B une $\Bbbk$-algèbre noethérienne $\mathbb{N}$-graduée connexe. Si pour tout quotient premier non-simple gradué B/P de B il existe un élément homogène normal non nul dans $(B/P)_{\geq 1}$, on dit que B a* assez d'éléments normaux.

La classe des algèbres avec assez d'éléments normaux est vaste. Par exemple, si une $\Bbbk$-algèbre noethérienne $\mathbb{N}$-graduée connexe B a une suite normalisante $x_1, \ldots, x_n$ d'éléments de $B_{\geq 1}$ telle que $B/(x_1, \ldots, x_n)$ soit un $\Bbbk$-espace vectoriel de dimension finie, alors B a assez d'éléments normaux (voir [Z; p. 392]). En outre, comme on le précisera à la remarque 4.1.7, si B a assez d'éléments normaux, elle se comporte comme une algèbre commutative vis-à-vis des propriétés de AS-Gorenstein et AS-Cohen-Macaulay.

Le résultat ci-dessous est dû à Yekutieli et Zhang (voir [YZ]). Son importance est capitale dans la suite.

Théorème 4.1.5 – *On suppose que A a assez d'éléments normaux. Alors, pour tout A-module à gauche gradué et de type fini M,*

$$\sup\{i \in \mathbb{N} \mid H^i_{\mathfrak{m}}(M) \neq 0\} = \mathrm{GKdim}_A M < +\infty.$$

Remarque 4.1.6 – Supposons que A a assez d'éléments normaux. Si M est un A-module à gauche gradué, non nul et de type fini, d'après le théorème 4.1.5 et le lemme 4.1.3, $\{i \in \mathbb{N} \mid H^i_{\mathfrak{m}}(M) \neq 0\}$ est non vide, contient $\mathrm{depth}_A M$ et $\mathrm{GKdim}_A M$ et tout entier i dans cet ensemble satisfait à $\mathrm{depth}_A M \leq i \leq \mathrm{GKdim}_A M$. Ce résultat crucial est une version non commutative du classique Théorème d'annulation de Grothendieck pour les anneaux (commutatifs) locaux noethériens (voir [BH; Theo. 3.5.7]).

Remarque 4.1.7 – Les algèbres noethériennes $\mathbb{N}$-graduées connexes avec assez d'éléments normaux se comportent comme les anneaux commutatifs noethériens, vis-à-vis des propriétés de AS-Cohen-Macaulay et AS-Gorenstein. En effet, si A a assez d'éléments normaux, elle est AS-Gorenstein si et seulement si $\mathrm{injdim}_A A = \mathrm{injdim}_{A^\circ} A < \infty$ et si elle est AS-Gorenstein, alors elle est AS-Cohen-Macaulay.

4.2 Algèbres graduées quantiques avec loi de redressement.

Les résultats de cette sous-section sont issus de [LR(3) ; Section 1].

Soit A une $\mathbb{k}$-algèbre $\mathbb{N}$-graduée et Π un sous-ensemble fini d'éléments de A partiellement ordonné par $<_{\mathrm{st}}$. On appelle monôme standard sur Π un élément de A qui est soit égal à 1, soit de la forme $\alpha_1 \dots \alpha_s$, pour $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in \Pi$ et $\alpha_1 \leq_{\mathrm{st}} \dots \leq_{\mathrm{st}} \alpha_s$.

Définition 4.2.1 – *Soit A une $\mathbb{k}$-algèbre $\mathbb{N}$-graduée et Π un sous-ensemble fini d'éléments de A muni d'un ordre partiel $<_{\mathrm{st}}$. On dit que A est une algèbre graduée quantique avec loi de redressement (A.L.R. graduée quantique en abrégé) sur $(\Pi, \leq_{\mathrm{st}})$ si les conditions suivantes sont satisfaites.*
(1) Les éléments de Π sont homogènes de degré strictement positif.
(2) Les éléments de Π engendrent A comme $\mathbb{k}$-algèbre.
(3) L'ensemble des monômes standards sur Π est une famille libre.
(4) Si $\alpha, \beta \in \Pi$ ne sont pas comparables pour $<_{\mathrm{st}}$, alors $\alpha\beta$ est combinaison linéaire de termes λ ou $\lambda\mu$, où $\lambda, \mu \in \Pi$, $\lambda \leq_{\mathrm{st}} \mu$ et $\lambda <_{\mathrm{st}} \alpha, \beta$.
(5) Pour tous $\alpha, \beta \in \Pi$, il existe $c_{\alpha\beta} \in \mathbb{k}^*$ tel que $\alpha\beta - c_{\alpha\beta}\beta\alpha$ soit une combinaison linéaire de termes λ ou $\lambda\mu$, où $\lambda, \mu \in \Pi$, $\lambda \leq_{\mathrm{st}} \mu$ et $\lambda <_{\mathrm{st}} \alpha, \beta$.

Il s'avère en fait que, si A est une A.L.R. graduée quantique, l'ensemble des monômes standards est une base de A et que sa dimension de Gelfand-Kirillov se lit dans l'ensemble Π. On note $\mathrm{rg}\Pi$ le maximum des cardinaux de suites strictement croissantes pour $<_{\mathrm{st}}$ d'éléments de Π. On a alors le résultat suivant.

Proposition 4.2.2 – *Soit A une A.L.R. graduée quantique sur l'ensemble Π.*
(1) L'ensemble des monômes standards sur Π est une $\mathbb{k}$-base de A.
(2) On a $\mathrm{GKdim} A = \mathrm{rg}\Pi$.

La notion de Π-idéal est un outil essentiel de l'étude des A.L.R. graduées quantiques. Soit Ω un sous-ensemble de Π ; on dit que Ω est un Π-ideal si il est stable par minoration, c'est-à-dire si il satisfait la condition suivante : si $\alpha \in \Omega$ et si $\beta \in \Pi$, $\beta \leq_{\rm st} \alpha$, alors $\beta \in \Omega$.

En premier lieu, si Ω est un Π-idéal, ses éléments forment une suite normalisante. C'est-à-dire qu'on peut ordonner Ω de sorte que son premier élément soit normal, le second soit normal modulo l'idéal engendré par le premier, *etc.* Plus précisément, on a les résultats suivants.

Proposition 4.2.3 – *Soit A une A.L.R. graduée quantique sur l'ensemble Π.*
(1) Soit $\alpha \in \Pi$; α est normal modulo l'ideal I_α de A engendré par les $\gamma \in \Pi$ tels que $\gamma <_{\rm st} \alpha$. En particulier, tout élément minimal pour $<_{\rm st}$ dans Π est normal.
(2) Si Π admet un unique élément minimal pour $<_{\rm st}$, cet élément est normal régulier dans A.
(3) Soit Ω un Π-ideal. Si $<_{\rm tot}$ est un ordre total sur Π qui raffine $<_{\rm st}$, les éléments de Ω, ordonnés par $<_{\rm tot}$ forment une suite normalisante de générateurs de l'idéal (Ω) engendré par Ω dans A.
(4) La $\Bbbk$-algèbre A est noethérienne, elle a assez d'éléments normaux et est à croissance polynomiale (au sens de [L ; 5.4]).

En second lieu, un idéal de A engendré par un Π-idéal a une base constituée de monômes standards et le quotient de A par un tel idéal est encore une A.L.R. graduée quantique. Cette remarque permet de faire des raisonnements par récurrence (sur le cardinal de l'ensemble ordonné sous-jacent) dans la classe des A.L.R. graduées quantiques.

Proposition 4.2.4 – *Soit A une A.L.R. graduée quantique sur l'ensemble Π.*
(1) Si Ω est un Π-ideal, l'ensemble des monômes standards de la forme $\alpha_1 \ldots \alpha_s$, où $\alpha_1 \in \Omega$ est une $\Bbbk$-base de (Ω).
(2) Si Ω est un Π-ideal, la $\Bbbk$-algèbre $A/(\Omega)$ est une A.L.R. graduée quantique sur le sous-ensemble partiellement ordonné $\Pi \setminus \Omega$ de Π.

4.3 A.L.R. graduées quantiques et propriété de AS-Cohen-Macaulay.

Les résultats de cette sous-section sont issus de [LR(3) ; §2.2].

Une raison essentielle qui conduit à définir et étudier les algèbres graduées quantiques avec loi de redressement est que, sous certaines hypothèses portant sur l'ensemble partiellement ordonné Π, elles sont AS-Cohen-Macaulay. C'est le lemme suivant qui permet de le montrer.

On commence par une remarque qui fournit une caractérisation facilement manipulable de la propriété de AS-Cohen-Macaulay. Elle est utile dans la preuve du lemme 4.3.2.

Remarque 4.3.1 – Soit A une $\Bbbk$-algèbre noethérienne, $\mathbb{N}$-graduée, connexe, avec assez d'éléments normaux. Si K est un idéal homogène de A, $K \neq A$, alors l'anneau A/K est AS-Cohen-Macaulay si et seulement si $\mathrm{depth}_A A/K = \mathrm{GKdim}_A A/K = \mathrm{GKdim}_{A^\circ} A/K = \mathrm{depth}_{A^\circ} A/K$. (Notons que, d'après [KL ; 5.4], l'égalité centrale est toujours vraie.) C'est une conséquence facile de l'énoncé 4.1.6 et d'un résultat standard d'indépendance de la cohomologie locale d'un module vis-à-vis de son annulateur.

Le lemme suivant généralise [BV ; Lemma 5.15] au cas non commutatif.

Lemme 4.3.2 – *Soit A une $\Bbbk$-algèbre noethérienne, $\mathbb{N}$-graduée, connexe, avec assez d'éléments normaux.*
(1) On suppose que A est à croissance polynomiale au sens de [L ; 5.4]. Soit $x \in A$ un élément

normal, régulier, homogène de degré strictement positif. Alors, l'anneau A/xA est AS-Cohen-Macaulay si et seulement si l'anneau A est AS-Cohen-Macaulay.
(2) Soient I, J des idéaux homogènes de A tels que :
(i) $\mathrm{GKdim}_A A/I = \mathrm{GKdim}_A A/J = \mathrm{GKdim}_A A$,
(ii) $\mathrm{GKdim}_A A/(I+J) = \mathrm{GKdim}_A A - 1$,
(iii) $I \cap J = (0)$,
(iv) les anneaux A/I et A/J sont AS-Cohen-Macaulay.
Alors, l'anneau A est AS-Cohen-Macaulay si et seulement si l'anneau $A/(I+J)$ est AS-Cohen-Macaulay.

On en déduit le théorème suivant, résultat essentiel de cette sous-section. Pour la définition d'ensemble partiellement ordonné *merveilleux* on renvoie à [BV ; chap.5.D]. Rappelons que tout treillis distributif est un ensemble partiellement ordonné merveilleux.

Théorème 4.3.3 – *Si A est une A.L.R. graduée quantique sur un ensemble partiellement ordonné $(\Pi, <_{\mathrm{st}})$ merveilleux, alors A est AS-Cohen-Macaulay.*

4.4 Exemples d'A.L.R. graduées quantiques : $\mathcal{O}_q(G_{m,n}(\Bbbk))$ et $\mathcal{O}_q(M_{m,n}(\Bbbk))/\mathcal{I}_t$.

Les résultats de cette sous-section sont issus de [LR(3) ; Section 3]. Ils montrent que les grassmanniennes quantiques et les anneaux déterminantiels quantiques sont des A.L.R. graduées quantiques. Le point clé est de montrer ce résultat pour les grassmanniennes quantiques. Le cas de l'anneau des matrices quantiques puis celui des anneaux déterminantiels quantiques s'en déduisent.

Pour obtenir ces résultats, on aura besoin d'étendre les définitions de la section 1 au cas où le corps de base est remplacé par un anneau commutatif intègre, ce qui ne pose aucune difficulté. Si A est un anneau commutatif intègre de corps de fractions $\Bbbk$ et u une unité de A, pour $m, n \in \mathbb{N}^*$, l'anneau des matrices quantiques $m \times n$ sur A associé au paramètre u, noté $\mathcal{O}_u(M_{m,n}(A))$, est défini comme la sous-A-algèbre de $\mathcal{O}_u(M_{m,n}(\Bbbk))$ engendrée par les X_{ij}, où $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$. Les mineurs quantiques de $\mathcal{O}_u(M_{m,n}(\Bbbk))$ sont clairement dans $\mathcal{O}_u(M_{m,n}(A))$, et on peut donc définir $\mathcal{O}_u(G_{m,n}(A))$ comme la sous-algèbre de $\mathcal{O}_u(M_{m,n}(A))$ engendrée par les mineurs quantiques maximaux.

Pour tout le reste de la section 4, on fixe $m, n \in \mathbb{N}^*$ et on suppose (sans perte de généralité) que $m \leq n$.

On note Π le sous-ensemble de $\mathbb{N}^m$ des m-uplets $(i_1, \ldots, i_m)$ tels que $1 \leq i_1 < \ldots < i_m \leq n$. Un tel élément de $\mathbb{N}^m$ sera noté $\{i_1 < \ldots < i_m\}$ pour souligner qu'il est dans Π. On munit Π de l'ordre (partiel), noté $\leq_{\mathrm{st}}$, défini par :

$$\{i_1 < \ldots < i_m\} \leq_{\mathrm{st}} \{j_1 < \ldots < j_m\} \qquad \text{si} \qquad i_s \leq j_s \qquad \text{pour} \qquad 1 \leq s \leq m.$$

A un élément $I = \{i_1 < \ldots < i_m\} \in \Pi$, on associe le mineur quantique maximal $[I]$ de $\mathcal{O}_q(M_{m,n}(\Bbbk))$ (voir la section 1). Dans la suite, on identifiera Π et l'ensemble des mineurs quantiques maximaux de $\mathcal{O}_q(M_{m,n}(\Bbbk))$. Ainsi, $\mathcal{O}_q(G_{m,n}(\Bbbk))$ est la sous-$\Bbbk$-algèbre de $\mathcal{O}_q(M_{m,n}(\Bbbk))$ engendrée par $\{[I], I \in \Pi\}$. L'algèbre $\mathcal{O}_q(G_{m,n}(\Bbbk))$ hérite de $\mathcal{O}_q(M_{m,n}(\Bbbk))$ d'une graduation où, pour $I \in \Pi$, $[I]$ est homogène de degré un. On déduit facilement des résultats de [GL(1)] que l'ensemble des monômes standards (voir l'introduction de la sous-section 4.2) est une famille libre de $\mathcal{O}_q(G_{m,n}(\Bbbk))$; en fait, c'est même une base de $\mathcal{O}_q(G_{m,n}(\Bbbk))$ (voir [KLR ; Corollary 2.8]). Cette base sera appelée la base standard de $\mathcal{O}_q(G_{m,n}(\Bbbk))$; elle est donc composé de 1 et des produits $[I_1]\dots[I_s]$, où $I_1 \leq_{\mathrm{st}} \dots \leq_{\mathrm{st}} I_s$ sont des éléments de Π.

Loi de redressement dans $\mathcal{O}_q(G_{m,n}(\Bbbk))$. On appelle loi de redressement dans $\mathcal{O}_q(G_{m,n}(\Bbbk))$ l'ensemble des relations qui figurent dans le théorème 4.4.5. Pour établir l'existence d'une telle loi, on est amené naturellement à introduire des analogues quantiques de l'anneau des coordonnées sur les variétés de Schubert et ce, sur l'anneau de base $\mathcal{A} = \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$, le paramètre étant égal à t.

Plus précisément, à tout élément $\gamma \in \Pi$ on associe l'ensemble $\Omega_\gamma := \{\pi \in \Pi \mid \pi \not\geq_{\mathrm{st}} \gamma\}$ (c'est un Π-idéal) et l'on note $I_{\gamma,\mathcal{A}}$ l'idéal de $\mathcal{O}_t(G_{m,n}(\mathcal{A}))$ engendré par les mineurs $[I]$ où $I \in \Omega_\gamma$. On pose alors

$$\mathcal{O}_t(G_{m,n}(\mathcal{A}))_\gamma = \mathcal{O}_t(G_{m,n}(\mathcal{A}))/I_{\gamma,\mathcal{A}} \quad \text{et} \quad \Theta_{\gamma,\mathcal{A}} : \mathcal{O}_t(G_{m,n}(\mathcal{A})) \longrightarrow \mathcal{O}_t(G_{m,n}(\mathcal{A}))_\gamma.$$

L'anneau quotient $\mathcal{O}_t(G_{m,n}(\mathcal{A}))_\gamma$ sera appelé la variété de Schubert quantique (sur $\mathcal{A}$) associée à γ ($\Theta_{\gamma,\mathcal{A}}$ est la projection canonique). Le point crucial pour établir la loi de redressement souhaitée de $\mathcal{O}_q(G_{m,n}(\Bbbk))$ est la proposition 4.4.3, qui met en évidence une base particulièrement utile du $\mathcal{A}$-module $\mathcal{O}_t(G_{m,n}(\mathcal{A}))_\gamma$.

On doit commencer par établir l'existence d'une base standard pour les grassmanniennes quantiques sur un anneau commutatif intègre quelconque (ce qui généralise le corollaire 2.8 de [KLR] qui traite le cas des corps). On étend la terminologie introduite au début de la sous-section 4.2 au cas des algèbres sur un anneau. Soit A un anneau commutatif intègre et u une unité de A ; on appelle monôme standard de $\mathcal{O}_u(G_{m,n}(A))$ un élément qui est soit égal à 1, soit de la forme $[I_1]\dots[I_s]$, où $I_1 \leq_{\mathrm{st}} \dots \leq_{\mathrm{st}} I_s$ est une suite croissante d'éléments de Π. On a alors le résultat suivant, issu de la sous-section 3.2 de [LR(3)].

Proposition 4.4.1 – *Soit A un anneau commutatif intègre et u un élément inversible de A. L'ensemble des monômes standards de $\mathcal{O}_u(G_{m,n}(A))$ est une base du A-module $\mathcal{O}_u(G_{m,n}(A))$.*

La proposition 4.4.3 ci-dessous apparait en [LR(3) ; Remark 3.3.7]. Sa preuve occupe l'essentiel des sections 3.2 et 3.3 de [LR(3)]. L'un des arguments centraux de cette preuve est la proposition 4.4.2 ci-dessous, qui fournit une première famille de relations de commutation entre les générateurs d'une grassmannienne quantique sur $\mathbb{C}$.

Proposition 4.4.2 – *On suppose que q est un élément de $\mathbb{C}^*$, non racine de l'unité. Soient $I, J \in \Pi$; il existe une relation*

$$[I][J] - q^{e_{I,J}}[J][I] = \sum_{M <_{\mathrm{st}} I \,;\, J <_{\mathrm{st}} L} g_{L,M}[L][M],$$

dans $\mathcal{O}_q(G_{m,n}(\mathbb{C}))$, où $e_{I,J} \in \mathbb{Z}$ et $g_{L,M} \in \mathbb{C}$, la sommation portant sur $L, M \subseteq \{1, \dots, n\}$ tels que $|L| = |M| = m$, $J <_{\mathrm{st}} L$ et $M <_{\mathrm{st}} I$.

La proposition 4.4.2 est essentiellement une retranscription dans le contexte du présent travail de certaines relations de commutation entre coefficients matriciels qui apparaissent dans les travaux de Hodges et Levasseur (voir [HL(1)] et [HL(2)], et en particulier [HL(2) ; Prop. 1.1]). La méthode de Hodges et Levasseur pour obtenir ces relations repose sur la théorie des représentations de l'algèbre enveloppante quantifiée $U_q(\mathfrak{sl}_r(\mathbb{C}))$ dont le groupe quantique $\mathcal{O}_q(SL_r(\mathbb{C}))$ est le dual restreint. (Pour des détails techniques, on peut consulter la proposition 3.3.2 de [LR(3)] et les commentaires qui la précèdent.)

Proposition 4.4.3 – *L'ensemble constitué de $\Theta_{\gamma,\mathcal{A}}(1)$ et des $\Theta_{\gamma,\mathcal{A}}([I_1]\dots[I_s])$, où $[I_1]\dots[I_s]$ est un monôme standard de $\mathcal{O}_t(G_{m,n}(\mathcal{A}))$ tel que $\gamma \leq_{\rm st} I_1$, est une $\mathcal{A}$-base de $\mathcal{O}_t(G_{m,n}(\mathcal{A}))_\gamma$.*

On est alors en mesure de démontrer le théorème suivant qui apparaît en [LR(3) ; Theo. 3.3.8].

Théorème 4.4.4 – *Soient I, J des éléments de Π non comparables pour $\leq_{\rm st}$. Alors, dans $\mathcal{O}_t(G_{m,n}(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]))$, le produit $[I][J]$ peut être réécrit sous la forme $[I][J] = \sum_{i=1}^{s} k_i[I_i][J_i]$, où $s \in \mathbb{N}^*$ et, pour $1 \leq i \leq s$, $k_i \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$, $I_i, J_i \in \Pi$, $I_i <_{\rm st} I, J$ et $I_i \leq_{\rm st} J_i$.*

On en déduit facilement l'existence d'une loi de redressement dans $\mathcal{O}_q(G_{m,n}(\Bbbk))$, c'est le contenu du théorème suivant qui figure en [LR(3) ; Theo. 3.3.9].

Théorème 4.4.5 – *Soient I, J des éléments de Π non comparables pour $\leq_{\rm st}$. Alors, dans $\mathcal{O}_q(G_{m,n}(\Bbbk))$, le produit $[I][J]$ peut être réécrit sous la forme*

$$[I][J] = \sum_{i=1}^{s} k_i[I_i][J_i],$$

où $s \in \mathbb{N}^*$ et, pour $1 \leq i \leq s$, $k_i \in \Bbbk$, $I_i, J_i \in \Pi$, $I_i <_{\rm st} I, J$ et $I_i \leq_{\rm st} J_i$.

Structure d'A.L.R. graduée quantique pour $\mathcal{O}_q(G_{m,n}(\Bbbk))$. Les résultats du paragraphe précédent montrent que $\mathcal{O}_q(G_{m,n}(\Bbbk))$ satisfait aux conditions (1) à (4) de la définition 4.2.1. Il reste à établir des relations de commutation du type exigé au point (5) de la définition 4.2.1 pour conclure. Notons que les relations de commutation de la proposition 4.4.2 ne suffisent pas à atteindre ce but. Cependant, en utilisant la base standard de $\mathcal{O}_u(G_{m,n}(A))$ de la proposition 4.4.1 et la loi de redressement du théorème 4.4.5, on peut modifier ces relations et obtenir de nouvelles relations de commutation, du type requis. Ces nouvelles relations de commutation figurent en [LR(3) ; Theo. 3.4.4] ; leur démonstration occupe l'essentiel de la sous-section 3.4 de [LR(3)]. Finalement, on en déduit le premier point du théorème 4.4.6 suivant. Le second point s'en déduit d'après le second point de la proposition 4.2.4 puisque, pour tout $\gamma \in \Pi$, Ω_γ est un Π-idéal.

Théorème 4.4.6 – [LR(3) ; Theo. 3.4.5, Cor. 3.4.6]
(i) La $\Bbbk$-algèbre $\mathcal{O}_q(G_{m,n}(\Bbbk))$ est une A.L.R. graduée quantique sur Π.
(ii) Pour tout $\gamma \in \Pi$, la $\Bbbk$-algèbre $\mathcal{O}_q(G_{m,n}(\Bbbk))_\gamma$ est une A.L.R. graduée quantique sur $\Pi \setminus \Omega_\gamma$.

Structure d'A.L.R. graduée quantique pour $\mathcal{O}_q(M_{m,n}(\Bbbk))/\mathcal{I}_t$. On considère l'ensemble Δ des couples de t-uplets (ordonnés) de la forme $(\{i_1 < \dots < i_t\}, \{j_1 < \dots < j_t\})$, où $1 \leq t \leq m$, $1 \leq i_1 < \dots < i_t \leq m$, $1 \leq j_1 < \dots < j_t \leq n$. On ordonne Δ par l'ordre partiel, noté $\leq_{\rm st}$, et défini de la façon suivante : si $(I, J) = (\{i_1 < \dots < i_u\}, \{j_1 < \dots < j_u\})$ et $(K, L) = (\{k_1 < \dots < k_v\}, \{\ell_1 < \dots < \ell_v\})$ sont dans Δ $(1 \leq u, v \leq m)$, alors $(I, J) \leq_{\rm st} (K, L)$ si l'on a $u \geq v$ et, pour $1 \leq s \leq v$, $i_s \leq k_s$ et $j_s \leq \ell_s$.

Il s'avère que $\mathcal{O}_q(M_{m,n}(\Bbbk))$ est une A.L.R. graduée quantique sur Δ. Ce résultat se déduit facilement de la propriété analogue pour les grassmanniennes quantique à l'aide de l'application, dite de *deshomogénéisation* définie ci-dessous.

On sait (voir [KLR; Lemma 1.5]) que le mineur quantique $[n+1, \dots, n+m]$ est un élément normal de la grassmannienne quantique $\mathcal{O}_q(G_{m,m+n}(\Bbbk))$. On peut donc localiser $\mathcal{O}_q(G_{m,m+n}(\Bbbk))$

en les puissances de cet élément. La localisation correspondante est notée $\mathcal{O}_q(G_{m,m+n}(\Bbbk))[[n+1,\ldots,n+m]^{-1}]$. Soit alors ϕ l'automorphisme de $\mathcal{O}_q(M_{m,n}(\Bbbk))$ défini par $\phi(X_{ij}) = q^{-1}X_{ij}$, pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$. D'après [KLR; Corollary 4.4], on dispose d'un isomorphisme de $\Bbbk$-algèbres

$$D_{m,n} \ : \ \mathcal{O}_q(M_{m,n}(\Bbbk))[y,y^{-1};\phi] \ \longrightarrow \ \mathcal{O}_q(G_{m,m+n}(\Bbbk))[[n+1,\ldots,n+m]^{-1}]$$

tel que $D_{m,n}(X_{ij}) = [j,n+1,\ldots,n+\widehat{m+1}-i,\ldots,n+m][n+1,\ldots,n+m]^{-1}$ et $D_{m,n}(y) = [n+1,\ldots,n+m]$. (On note $\{j,n+1,\ldots,n+\widehat{m+1}-i,\ldots,n+m\}$ l'ensemble (ordonné) obtenu à partir de $\{j,n+1,\ldots,n+m\}$ en supprimant $n+m+1-i$.) En fait, comme on le montre dans [LR(3) ; Lemma 3.5.1 et Lemma 3.5.2], le morphisme $D_{m,n}$ met en correspondance bijective l'ensemble ordonné Δ de tous les mineurs quantiques de $\mathcal{O}_q(M_{m,n}(\Bbbk))$ et l'ensemble ordonné des mineurs maximaux $[I] \in \mathcal{O}_q(G_{m,m+n}(\Bbbk))[[n+1,\ldots,n+m]^{-1}]$, où $I \in \Pi \setminus \{\{n+1,\ldots,n+m\}\}$ (à multiplication près par $[n+1,\ldots,n+m]^{-1}$).

En utilisant le morphisme de deshomogénéisation il est facile de déduire du théorème 4.4.6 le premier point du théorème suivant. Le second s'en déduit à l'aide du second point de la proposition 4.2.4 car en fait les idéaux $\mathcal{I}_t$ de $\mathcal{O}_q(M_{m,n}(\Bbbk))$ sont engendrés par des Δ-idéaux.

Théorème 4.4.7 – [LR(3) ; Theo. 3.5.3, Cor. 3.5.4]
(i) La $\Bbbk$-algèbre $\mathcal{O}_q(M_{m,n}(\Bbbk))$ est une A.L.R. graduée quantique sur Δ.
(ii) Pour $1 \leq t \leq m$, $\mathcal{O}_q(M_{m,n}(\Bbbk))/\mathcal{I}_t$ est une A.L.R. graduée quantique.

4.5 Propriété de AS-Cohen-Macaulay pour $\mathcal{O}_q(G_{m,n}(\Bbbk))$ et $\mathcal{O}_q(M_{m,n}(\Bbbk))/\mathcal{I}_t$.

On peut maintenant énoncer les résultats principaux de cette section : les anneaux déterminantiels quantiques et les grassmanniennes quantiques sont AS-Cohen-Macaulay. On détermine ensuite, au moyen de leur série de Hilbert, ceux parmi ces anneaux qui sont AS-Gorenstein. Tous ces résultats sont issus de la section 4 de [LR(3)].

Théorème 4.5.1 – *Pour $1 \leq t \leq m$, l'anneau déterminantiel quantique $\mathcal{O}_q(M_{m,n}(\Bbbk))/\mathcal{I}_t$ est AS-Cohen-Macaulay.*

Théorème 4.5.2 – *Pour $\gamma \in \Pi$, la variété de Schubert quantique $\mathcal{O}_q(G_{m,n}(\Bbbk))_\gamma$ est AS-Cohen-Macaulay. En particulier, la grassmannienne quantique $\mathcal{O}_q(G_{m,n}(\Bbbk))$ est AS-Cohen-Macaulay.*

On en déduit facilement, à l'aide du critère donné par [JZ; Theo. 6.2], ceux de ces anneaux qui sont AS-Gorenstein. Notons que ce critère repose sur l'analyse de la série de Hilbert des $\Bbbk$-algèbres considérées. Comme les séries de Hilbert sont indépendantes du paramètre q, elles coïncident avec celles du cas commutatif ($q = 1$).

Théorème 4.5.3 – *La grassmannienne quantique $\mathcal{O}_q(G_{m,n}(\Bbbk))$ est AS-Gorenstein.*

Théorème 4.5.4 – *Pour $1 \leq t \leq m$, l'anneau déterminantiel quantique $\mathcal{O}_q(M_{m,n}(\Bbbk))/\mathcal{I}_t$ est AS-Gorenstein si et seulement si $t = 1$ ou $m = n$.*

5 Spectre premier et automorphismes des matrices jordaniennes.

Dans toute cette section, $\Bbbk$ est algébriquement clos de caractéristique zéro. Tous les résultats exposés dans cette section sont issus de [DR].

5.1 Les algèbres $\mathcal{O}^J(M_2)$ et $\mathcal{O}^J(SL_2)$.

On commence par définir brièvement la déformation jordanienne de l'anneau de coordonnées de la variété M_2 des matrices 2×2 à coefficients dans $\Bbbk$. Si l'on applique la méthode de Faddeev, Reshetikhin et Takhtajan à une certaine R-matrice (dite jordanienne) dépendant d'un paramètre $h \in \Bbbk$, on obtient une famille de bigèbres R_h, $h \in \Bbbk$. Comme on le remarque dans [DR ; Remark 1.2], il s'avère que les bigèbres ainsi obtenues sont isomorphes à R_1 lorsque $h \in \Bbbk^*$ et qu'en outre R_0 coïncide avec $\mathcal{O}^J(M_2)$ (l'anneau de coordonnées usuel de M_2). On se limite donc, dans la suite, à l'étude de l'algèbre $R = R_1$, dite *déformation jordannienne de* $\mathcal{O}(M_2)$, dont on rappelle la définition en 5.1.1 ci-dessous. La déformation correspondante de l'anneau de coordonnées sur le groupe algébrique SL_2 s'obtient ensuite en mettant en évidence un élément central z de R, qui joue dans R le rôle du déterminant du cas classique. L'algèbre $R/(z-1)$ est une algèbre de Hopf, déformation jordanienne de l'algèbre de coordonnées de SL_2. Pour des détails concernant l'origine de ces déformations et pour des précisions sur la construction évoquée ci-dessus, on renvoie à l'introduction et à la section 1 de [DR].

Définition 5.1.1 – *La déformation jordanienne de l'anneau des coordonnées sur l'espace des matrices 2×2 à coefficients dans $\Bbbk$, notée $R = \mathcal{O}^J(M_2)$, est l'algèbre engendrée sur $\Bbbk$ par quatre générateurs a, b, c, d vérifiant les relations :*

$$\left\{ \begin{array}{lll} [a,c] = c^2, & [a,b] = ad - bc + ac - a^2, & [d,b] = ad - bc + ac - d^2, \\ [d,c] = c^2, & [a,d] = dc - ac, & [b,c] = dc + ac - c^2. \end{array} \right. \tag{1}$$

Le déterminant jordanien de $\mathcal{O}^J(M_2)$ est l'élément $z = ad - bc + ac$ qui est central dans R. La déformation jordanienne de l'anneau des coordonnées sur le groupe algébrique SL_2 est l'algèbre $\overline{R} = \mathcal{O}^J(SL_2)$ quotient de $R = \mathcal{O}^J(M_2)$ par l'idéal bilatère $(z-1)R$. Ses générateurs canoniques sont notés $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}$.

On pose $u = a - d \in R$; cet élément sera utile dans la suite.

5.2 Spectre et facteurs premiers de $\mathcal{O}^J(M_2)$ et $\mathcal{O}^J(SL_2)$.

La section 2 de [DR] s'attache à décrire le spectre de $\mathcal{O}^J(M_2)$ et $\mathcal{O}^J(SL_2)$ et à étudier les quotients premiers de ces anneaux.

Le résultat suivant, important dans la suite, se déduit facilement de résultats standards d'algèbre non commutative ; il figure en [DR ; 2.1.1].

Théorème 5.2.1 – *Dans $R = \mathcal{O}^J(M_2)$, tout idéal premier est complètement premier.*

Remarque 5.2.2 – La sous-section 2.2 de [DR] s'intéresse plus particulièrement aux idéaux premiers de hauteur 1. On y montre que R est un anneau noethérien factoriel, au sens non commutatif de Chatters et Jordan. Cela revient à dire que R est un anneau intègre dont les idéaux premiers de hauteur 1 sont des idéaux principaux engendrés par un élément normal. Pour ce faire, on démontre une version non commutative d'un lemme célèbre de Nagata qui caractérise la factorialité au moyen de certaines localisations (voir [DR ; Lemma 2.2.3]).

Le spectre premier de R est muni de sa topologie de Jacobson. Les résultats de la section 2.3 de [DR] montrent que Spec R est réunion disjointe de cinq *composantes*, homéomorphes (pour la topologie de Jacobson induite) à des spectres d'anneaux commutatifs. Cette partition de Spec R

permet de caractériser les idéaux primitifs : un idéal de Spec R est primitif si et seulement si il est maximal dans sa composante. On montre aussi que, pour tout $P \in$ Spec R, le corps (gauche) des fractions de R/P est isomorphe à un corps commutatif ou à un corps de Weyl. Rappelons que, si K est un corps commutatif, l'algèbre de Weyl $A_1(K)$ est la K-algèbre engendrée par deux générateurs x, y soumis à la relation $xy - yx = 1$. Elle est intègre et son corps de fractions, appelé corps de Weyl, est noté $D_1(K)$.

Rappelons que les déformations quantiques ont fait l'objet de nombreux travaux visant à décrire leur spectre au moyen d'une partition pertinente ou d'une stratification liée à l'action d'un groupe d'automorphismes sur Spec R. Pour des détails bibliographiques et des développements très complets sur cette approche, on renvoie le lecteur à [BG]. C'est dans cette perspective que s'inscrivent les résultats suivants (à ce sujet, voir les compléments figurant dans la remarque 5.3.4).

On appellera composantes de Spec R les sous-ensembles suivants de Spec R :
– $\mathcal{S}^c$: l'ensemble des idéaux premiers de R qui ne contiennent pas c ;
– $\mathcal{S}^a_{c,u}$: l'ensemble des idéaux premiers de R qui contiennent c et u et ne contiennent pas a ;
– $\mathcal{S}^{a,u}_c$: l'ensemble des idéaux premiers de R qui contiennent c et ne contiennent ni a ni u ;
– $\mathcal{S}^u_{c,a}$: l'ensemble des idéaux premiers de R qui contiennent c et a et ne contiennent pas u ;
– $\mathcal{S}_{c,a,u}$: l'ensemble des idéaux premiers de R qui contiennent c, a et u.

Il est clair que Spec $R = \mathcal{S}^c \cup \mathcal{S}^a_{c,u} \cup \mathcal{S}^{a,u}_c \cup \mathcal{S}^u_{c,a} \cup \mathcal{S}_{c,a,u}$ (réunion disjointe).

On a alors les trois théorèmes suivants, tous issus de [DR ; §2.3].

Théorème 5.2.3 – *Le spectre de $R = \mathcal{O}^J(M_2)$ est réunion disjointe de cinq composantes qui sont toutes homéomorphes à des spectres d'anneaux commutatifs.*

Théorème 5.2.4 – *Soit P un idéal de* Spec R. *Alors, P est primitif si et seulement si P est maximal dans sa composante.*

Théorème 5.2.5 – *Si P est un idéal (complètement) premier de $R = \mathcal{O}^J(M_2)$, il existe un corps commutatif K, extension de $\Bbbk$, tel que le corps (gauche) des fractions de R/P soit isomorphe à K ou à un corps de Weyl $D_1(K)$.*

Remarque 5.2.6 – Spectre de $\mathcal{O}^J(SL_2)$.
On déduit facilement des résultats précédents la description du réseau des idéaux premiers de R qui contiennent $(z-1)$, c'est-à-dire du spectre de $\mathcal{O}^J(SL_2) = R/(z-1)$. De plus, parmi ces idéaux, les idéaux primitifs sont $(z-1, c, a-1, b-\mu)$, $(z-1, c, a+1, b-\mu')$, $(z-1, c)$ et $(z-1, a-d-\lambda c)$, où $\mu, \mu', \lambda \in \Bbbk$. On obtient le schéma suivant.

$$
\begin{tikzcd}[arrows=dash]
(z-1,c,a-1,b-\mu)_{\mu\in\Bbbk} \arrow[d] & & (z-1,c,a+1,b-\mu')_{\mu'\in\Bbbk} \arrow[d] \\
(z-1,c,a-1) \arrow[d] \arrow[drr] & & (z-1,c,a+1) \arrow[d] \arrow[dll] \\
(z-1,c) \arrow[dr] & & (z-1,a-d-\lambda c)_{\lambda\in\Bbbk} \arrow[dl] \\
& (z-1) &
\end{tikzcd}
$$

5.3 Automorphismes de $\mathcal{O}^J(M_2)$ et $\mathcal{O}^J(SL_2)$.

Dans cette sous-section, on décrit le groupe $\mathrm{Aut}R$ des automorphismes de $\mathbb{k}$-algèbre de $R = \mathcal{O}^J(M_2)$. Ces résultats sont issus de [DR ; section 3].

Cette étude met en évidence que le groupe des automorphismes de R est relativement riche. C'est une différence remarquable avec le cas des déformations quantiques, dont les groupes d'automorphismes sont souvent très petits. Pour des commentaires supplémentaires et une mise en perspective plus complète de ces résultats, on renvoie le lecteur à l'introduction de [DR].

On commence par introduire certains automorphismes particuliers.

Il est facile de montrer que la sous-algèbre $\mathbb{k}[z, u, c]$ de R est un anneau de polynômes (commutatif) en trois indéterminées z, u, c.

Proposition 5.3.1 – [DR ; Proposition 3.1]
(i) Il existe $\tau \in \mathrm{Aut}R$ tel que : $\tau(a) = d$, $\tau(b) = b$, $\tau(c) = c$, $\tau(d) = a$, et $T = \{\mathrm{id}_R, \tau\}$ est un sous-groupe d'ordre 2 de $\mathrm{Aut}R$.
(ii) Pour tout $\alpha \in \mathbb{k}^*$, il existe $\sigma_\alpha \in \mathrm{Aut}R$ tel que : $\sigma_\alpha(a) = \alpha a$, $\sigma_\alpha(b) = \alpha b$, $\sigma_\alpha(c) = \alpha c$, $\sigma_\alpha(d) = \alpha d$, et $H = \{\sigma_\alpha\,;\, \alpha \in \mathbb{k}^*\}$ est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}R$ isomorphe à $\mathbb{k}^*$.
(iii) Pour tout $q(z) \in \mathbb{k}[z]$, il existe $\eta_q \in \mathrm{Aut}R$ tel que : $\eta_q(a) = a$, $\eta_q(b) = b + q(z)a$, $\eta_q(c) = c$, $\eta_q(d) = d + q(z)c$, et $G_1 = \{\eta_q\,;\, q(z) \in \mathbb{k}[z]\}$ est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}R$ isomorphe au groupe additif $\mathbb{k}[z]$.
(iv) Pour tout $p(z, u, c) \in \mathbb{k}[z, u, c]$, il existe $\xi_p \in \mathrm{Aut}R$ tel que : $\xi_p(a) = a + p(z, u, c)c$, $\xi_p(c) = c$, $\xi_p(d) = d + p(z, u, c)c$, $\xi_p(b) = b + ap(z, u, c) + p(z, u, c)d + p(z, u, c)^2 c$, et $G_2 = \{\xi_p\,;\, p(z, u, c) \in \mathbb{k}[z, u, c]\}$ est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}R$ isomorphe au groupe additif $\mathbb{k}[z, u, c]$.

En fait, comme le montre le théorème suivant ([DR ; Theo. 3.3]), le groupe des automorphismes de R est le produit semi-direct des sous-groupes définis à la proposition 5.3.1. Notons à ce sujet que, dans les notations de la proposition 5.3.1, les sous-groupes T et H sont composés d'automorphismes linéaires de R (c'est-à-dire d'automorphismes qui induisent des automorphismes $\mathbb{k}$-linéaires de $\mathbb{k}a \oplus \mathbb{k}b \oplus \mathbb{k}c \oplus \mathbb{k}d = \mathbb{k}a \oplus \mathbb{k}b \oplus \mathbb{k}c \oplus \mathbb{k}u$) et que les éléments des sous-groupes G_1 et G_2 sont des exponentiels de dérivations localement nilpotentes de R (à ce sujet, voir la preuve de [DR ; Proposition 3.1], ainsi que [DR : Remark 3.5] où l'on détermine toutes les dérivations localement nilpotentes de R).

Théorème 5.3.2 – *On a : $\mathrm{Aut}R = [(G_2 \rtimes G_1) \rtimes H] \rtimes T$.*

La remarque suivante ([DR ; Rem. 3.6]) décrit le groupe des automorphismes de $\mathcal{O}^J(SL_2)$.

Remarque 5.3.3 – Automorphismes de $\overline{R} = \mathcal{O}^J(SL_2)$.
On considère, à présent, $\mathcal{O}^J(SL_2) = \overline{R} = R/(z-1)$. Soit $\mathrm{Aut}^z R = \{\theta \in \mathrm{Aut}R\,;\, \theta(z) = z\}$. Il est clair que tout automorphisme $\theta \in \mathrm{Aut}^z R$ induit un automorphisme $\overline{\theta}$ de $\overline{R}$. L'application canonique $\theta \mapsto \overline{\theta}$ est un homomorphisme de groupes $\Gamma : \mathrm{Aut}^z R \to \mathrm{Aut}\overline{R}$. Dans $\mathrm{Aut}^z R$, on considère les sous-groupes T et $H' = \{\sigma_\alpha \in H\,;\, \alpha = \pm 1\}$ d'ordre 2, $G'_1 = \{\eta_q \in G_1\,;\, q \in \mathbb{k}\} \simeq \mathbb{k}$ et $G'_2 = \{\xi_p \in G_2\,;\, p(u, c) \in \mathbb{k}[u, c]\} \simeq \mathbb{k}[u, c]$ (voir 5.3.1 pour les notations). On peut montrer, en utilisant le spectre premier de $\overline{R}$, que la restriction Γ_1 de Γ à $[(G'_2 \rtimes G'_1) \rtimes H'] \rtimes T$ est un isomorphisme. Ainsi, on a $\mathrm{Aut}\overline{R} \simeq [(G'_2 \rtimes G'_1) \rtimes H'] \rtimes T$.

Remarque 5.3.4 – [DR ; Rem. 3.7]
On conclut cette analyse en montrant que le spectre de $\mathcal{O}^J(M(2))$ (resp. $\mathcal{O}^J(SL(2))$) peut être décrit comme réunion finie de $\mathcal{H}$-strates pour un groupe algébrique $\mathcal{H}$ convenable agissant rationnellement sur $\mathcal{O}^J(M(2))$ (resp. $\mathcal{O}^J(SL(2))$) par automorphismes de $\Bbbk$-algèbres. Pour plus de détails sur les stratifications de spectres, on renvoit à [BG], dont on utilise aussi les notations.
1. Stratification de Spec $\mathcal{O}^J(M(2))$. Soit $\mathcal{H}$ le sous-groupe de Aut$R$ engendré par H et G'_1 (voir 5.3.1 et 5.3.3 pour les notations). Il est clair que $\mathcal{H}$ est le sous-groupe $\{\phi_{\alpha,0,\mu},\ \alpha \in \Bbbk^*,\ \mu \in \Bbbk\}$ de Aut$R$. A l'aide des résultats précédents, on peut facilement montrer que chaque composante de Spec $\mathcal{O}^J(M(2))$ est réunion d'un nombre fini de $\mathcal{H}$-strates. Ainsi, Spec $\mathcal{O}^J(M(2))$ est lui-même réunion d'un nombre fini de $\mathcal{H}$-strates.
2. Stratification de Spec $\mathcal{O}^J(SL(2))$. On rappelle que $\overline{R} = \mathcal{O}^J(SL(2))$ et on note $\mathcal{H}$ le groupe d'automorphismes de $\overline{R}$ induit par les automorphismes de G'_1. La description de Spec $\overline{R}$ donnée en 5.2.6 permet de le décomposer en la réunion des quatre $\mathcal{H}$-strates suivantes :
(i) $\{P \in \text{Spec } \overline{R} \,|\, (\mathcal{H} : P) = (0)\} = \{(0)\} \cup \{(a - d - \lambda c), \lambda \in \Bbbk\}$,
(ii) $\{P \in \text{Spec } \overline{R} \,|\, (\mathcal{H} : P) = (c)\} = \{(c)\}$,
(iii) $\{P \in \text{Spec } \overline{R} \,|\, (\mathcal{H} : P) = (c, a - 1)\} = \{(c, a - 1)\} \cup \{(c, a - 1, b - \mu), \mu \in \Bbbk\}$,
(iv) $\{P \in \text{Spec } \overline{R} \,|\, (\mathcal{H} : P) = (c, a + 1)\} = \{(c, a + 1)\} \cup \{(c, a + 1, b - \mu), \mu \in \Bbbk\}$.
On montre facilement, à l'aide de 5.2.4 et 5.2.6, que dans R et $\overline{R}$ un idéal premier est primitif si et seulement si il est maximal dans sa strate.

Références.

[BG] K.A.Brown and K.R. Goodearl. Lectures on algebraic quantum groups. Advanced Courses in Mathematics, CRM Barcelona. Birkäuser, Basel, 2002.
[BH] W. Bruns and J. Herzog. Cohen-Macaulay rings. Cambridge studies in advanced math., 39. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.
[BV] W. Bruns and U. Vetter. Determinantal rings. Lecture notes in Math., 1327. Springer-Verlag, Berlin, 1988.
[DEP] C. De Concini, D. Eisenbud and C. Procesi. Hodge algebras. Astérisque, **91**. Société Mathématique de France, Paris, 1982.
[DP] C. De Concini and C. Procesi. *A characteristic free approach to invariant theory.* Adv. Math. **21** (1976), 330–354.
[DL(1)] M. Domokos and T.H. Lenagan. *Conjugation coinvariants of quantum matrices.* Bull. London Math. Soc. **35** (2003), 117-127.
[DL(2)] M. Domokos and T.H. Lenagan. *Weakly multiplicative coactions of quantized function algebras.* J. Pure and Appl. Algebra **183** (2003), 45-60.
[D] V.G. Drinfel'd. *Quantum groups*, in Proc. Internat. Congress of Mathematicians (Berkeley 1986), I, 798-820, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.
[DR] F. Dumas and L. Rigal. *Prime spectrum and automorphisms for 2×2 jordanian matrices.* Comm. Alg. **30** (2002), 2805-2828.
[E] D. Eisenbud. *Introduction to algebras with straightening laws.* Ring theory and algebra, III, 243–268. Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 55, Dekker, New-York, 1980.
[FRT] L.D. Faddeev, N.Y. Reshetikhin and L.A. Takhtajan. *Quantization of Lie groups and Lie algebras.* Algebraic Analysis, Vol. I (M. Kashiwara and T. Kawai, eds.), 129–139, Academic Press, Boston, MA, 1988.
[FH] R. Fioresi and C. Hacon. *Quantum coinvariant theory for the quantum special linear group and quantum Schubert varieties.* J. Algebra **242** (2001), 433-446.
[GL(1)] K.R. Goodearl and T.H. Lenagan. *Quantum determinantal ideals.* Duke Math. J. **103**

(2000), 165-190.
[GL(2)] K.R. Goodearl and T.H. Lenagan. *Quantized coinvariants at transcendental q.* To appear in the Proceedings of the Brussels Hopf Algebra Conference (2002).
[GLR] K.R. Goodearl, T.H. Lenagan and L. Rigal. *The first fundamental theorem of coinvariant theory for the quantum general linear group.* Publ. R.I.M.S. (Kyoto) **36** (2000), 269-296.
[H] M. Hochster. *Invariant theory of commutative rings.* Group actions on rings, 161–179, Contemporary Math., **43**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1985.
[HL(1)] T. J. Hodges and T. Levasseur. *Primitive ideals of* $\mathbb{C}_q[SL(3)]$. Comm. Math. Phys. **156** (1993), 581-605.
[HL(2)] T. J. Hodges and T. Levasseur. *Primitive ideals of* $\mathbb{C}_q[SL(n)]$. J. Algebra **168** (1994), 455-468.
[Ji] M. Jimbo. *A q-difference analogue of* $U(g)$ *and the Yang-Baxter equation.* Lett. Math. Phys. **10** (1985), 63-69.
[JZ] P. Jørgensen and J.J. Zhang. *Gourmet's guide to Gorensteinness.* Adv. Math. **151** (2000), no. 2, 313-345.
[Jo] A. Joseph. Quantum Groups and their Primitive Ideals. Ergebnisse der Math. (3), 29. Springer-Verlag, Berlin, 1995.
[K] C. Kassel. Quantum Groups. Graduate Texts in Mathematics, 155. Springer-Verlag, New-York, 1995.
[KLR] A.C. Kelly, T.H. Lenagan and L. Rigal. *Ring theoretic properties of quantum grassmannians.* A paraître dans J. of Algebra and its Applications.
[KL] G. Krause and T.H. Lenagan. Growth of Algebras and Gelfand-Kirillov dimension. Graduate Studies in Mathematics, 22. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
[La] S. Launois. *Generators for* $\mathcal{H}$*-invariant prime ideals in* $O_q(\mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{C}))$. A paraître dans Proc. Edin. Math. Soc.
[LR(1)] T.H. Lenagan and L. Rigal. *Dimensions of quantum determinantal rings.* Glasgow Math. J. **44** (2002), 285-292.
[LR(2)] T.H. Lenagan and L. Rigal. *The maximal order property for quantum determinantal rings.* A paraître dans Proc. Edin. Math. Soc.
[LR(3)] T.H. Lenagan and L. Rigal. *Quantum graded algebras with a straightening law and the AS-Cohen-Macaulay property for quantum determinantal rings and quantum grassmannians.* Preprint, 2003.
[L] T. Levasseur. *Some properties of non-commutative regular graded rings.* Glasgow Math. J. **34** (1992), 277-300.
[Ma] S. Majid. Foundations of Quantum Groups Theory. Cambridge Univ. Press., Cambridge, 1995.
[M] Y.I. Manin. Quantum groups and non-commutative geometry. Publ. Centre de Recherches Math., Univ. de Montréal, 1988.
[MR] G. Maury et J. Raynaud. Ordres maximaux au sens de K. Asano. Lecture Notes in Math. 808. Springer-Verlag, Berlin, 1980.
[McCR] J.C. McConnell and J.C. Robson. Noncommutative Noetherian rings. Graduate Studies in Mathematics, 30. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.
[NYM] M. Noumi, H. Yamada and K. Mimachi. *Finite dimensional representations of the quantum group* $GL_q(n;\mathbf{C})$ *and the zonal spherical functions on* $U_q(n-1)\setminus U_q(n)$. Japan J. Math. **19** (1993), 31–80.
[PW] B. Parshall and J.-P. Wang. *Quantum linear groups.* Mem. Amer. Math. Soc. **89** (1991), no. 439.
[R] L. Rigal. *Normalité de certains anneaux déterminantiels quantiques.* Proc. Edin. Math. Soc.

(2) **42** (1999), 621–640.
[Sta] S.T. Stafford. *Noncommutative projective geometry.* ICM 2002, Vol. II, Beijing Higher Education Press, 93–103 (2002).
[W] S.L. Woronowicz. *New quantum deformation of* $\mathrm{SL}(2, C)$. *Hopf algebra level.* Rep. Math. Phys. **30** (1991), 259-269.
[YZ] A. Yekutieli and J.J. Zhang. *Rings with Auslander dualizing complexes.* J. Algebra **213** (1999), 1-51.
[Z] J.J. Zhang. *Connected graded Gorenstein algebras with enough normal elements.* J. Alg. **189** (1997), 390-405.