Calcul d'homologies pour une certaine algèbre de Koszul non commutative

Mémoire de DEA

Nicolas Marconnet

Maître de stage : Roland Berger

Résumé

Nous allons exposer l'article de Michel Van den Bergh intitulé "Non-commutative homology of some three-dimensional quantum spaces" [1]. Le but de l'article est le calcul de l'homologie de Hochschild, de la cohomologie de de Rham et de l'homologie cyclique pour une algèbre régulière d'Artin-Schelter de type A.

Juin 2001 Université Joseph Fourier, Grenoble.

Dernière version : Janvier 2002 (Université Jean Monnet, Saint-Etienne)

Table des matières

Je tiens à remercier Roland Berger pour son encadrement et son aide tout au long de ce mémoire.

1 Introduction

Dans une première partie, nous présentons des résultats généraux sur les algèbres quadratiques de Koszul. Nous donnons plusieurs caractérisations équivalentes de ces algèbres, et nous faisons quelques remarques sur la catégorie des modules gradués, afin de donner un premier résultat concernant l'homologie de Hochschild des algèbres de Koszul.
Dans une seconde partie, nous donnons des résultats explicites sur l'homologie de Hochschild, la cohomologie de de Rham et l'homologie cyclique d'un exemple d'algèbres de Koszul : l'algèbre régulière d'Artin-Schelter de type A quadratique (générique). Le théorème principal est le théorème 3.13, qui calcule l'homologie de Hochschild, les autres résultats s'en déduisent. La preuve de ce théorème utilise la dégénérescence d'une suite spectrale particulière et les propriétés remarquables de certains éléments du complexe de Koszul associé à l'algèbre.

2 Généralités sur les algèbres de Koszul

2.1 Définition d'une algèbre de Koszul

Dans tout ce qui suit, k désigne un corps commutatif. Soit V un k-espace vectoriel de dimension finie, et TV l'algèbre tensorielle de V sur k. Soit R un sous-espace vectoriel de $V \otimes_k V$ et $I(R)$ l'idéal bilatère engendré par R dans TV. Clairement, $I(R)$ est un idéal gradué, et on note $(I(R)_n)_{n\geq 0}$ sa graduation. On note alors A l'algèbre $A = TV/I(R)$, et on dit que A est une *k-algèbre quadratique sur V*. C'est une k-algèbre graduée par les $A_n = V^{\otimes n}/I(R)_n$, $n \geq 0$. Explicitement, $I(R)_0 = I(R)_1 = 0$, $I(R)_2 = R$, $I(R)_3 = R \otimes V + V \otimes R, \ldots$
Soit $R^\perp \subset (V \otimes_k V)^*$ l'orthogonal du sous-espace R de $V \otimes_k V$ pour la dualité canonique $<,>$: $V \otimes_k V^* \to k$. On a un isomorphisme canonique : $(V \otimes_k V)^* \simeq V^* \otimes_k V^*$. On peut donc considérer que $R^\perp$ est inclus dans $V^* \otimes_k V^*$. On définit alors $A^! = T(V^*)/I(R^\perp)$, et on dit que $A^!$ est *l'algèbre duale* de A. C'est une algèbre quadratique sur V^*.

Définition 2.1 *(Produit intérieur)*
Soit $f \in (V^{*\otimes n})^*$, et soit $x \in V^*$. Alors le produit intérieur de f par x est $f.x \in (V^{*\otimes(n-1)})^*$, qui est défini par :

$$\begin{array}{rcl} f.x : V^{*\otimes(n-1)} & \longrightarrow & k \\ u_1 \otimes \cdots \otimes u_{n-1} & \longmapsto & f(x \otimes u_1 \otimes \cdots \otimes u_{n-1}) \end{array}$$

Soit $(x_i)_{i=1,..,n}$ une base de V, et soit $(\zeta_i)_{i=1,..,n}$ sa base duale. Soit

$$e = \sum_{i=0}^{n} x_i \otimes \zeta_i \in A \otimes A^!.$$

Proposition 2.2 *Dans l'algèbre $A \otimes A^!$, on a $e^2 = 0$.*

Preuve.
1. Montrons d'abord l'isomorphisme $(A_2^!)^* = ((V^* \otimes V^*)/R^\perp)^* \simeq R$.
On a un isomorphisme

$$f : V \otimes V \longrightarrow (V^* \otimes V^*)^*$$

$$a \longmapsto f(a)$$

où $f(a)(u) =< u, a >$.
Si $a = \sum b_i \otimes c_i \in R$ et si $u = \sum v_i \otimes w_i \in R^\perp$, on a $f(a)(u) = 0$. D'où une application

$$F : R \longrightarrow (A_2^!)^*$$

Soit $\lambda : V^* \otimes V^* \longrightarrow k$ s'annulant sur $R^\perp$. Puisque f est un isomorphisme, on a $\lambda = f(a)$ où $a \in V \otimes V$. Mais comme $\lambda(u) = f(a)(u) = 0$ $(\forall u \in R^\perp)$, i.e. $< u, a >= 0$ $(\forall u \in R^\perp)$, on a $a \in R$. Donc F est surjective.
De plus, $dim((A_2^!)^*) = dim((V^* \otimes V^*)/R^\perp) = dim(V^* \otimes V^*) - dim(R^\perp) = dim(V \otimes V) - (dim(V \otimes V) - dim(R)) = dim(R)$. Donc F est un isomorphisme.
2. On a l'isomorphisme canonique :

$$A_2 \otimes A_2^! \xrightarrow{\sim} Hom((A_2^!)^*, A_2)$$

$$a \otimes v \longmapsto [\lambda \mapsto \lambda(v).a]$$

Donc $A_2 \otimes A_2^! \simeq Hom(R, A_2)$.
D'autre part, si $f \in Hom(V \otimes V, V \otimes V)$, on définit $\tilde{f} \in Hom(R, A_2)$ comme étant la composée suivante :

$$R \overset{can}{\hookrightarrow} V \otimes V \xrightarrow{f} V \otimes V \xrightarrow{can} (V \otimes V)/R$$

En particulier, $\widetilde{1_{V \otimes V}} = 0$, où $1_{V \otimes V}$ est l'identité de $V \otimes V$.
3. Il suffit donc de vérifier que $e^2 = \widetilde{1_{V \otimes V}}$. Considérons $e^2 = \sum x_i x_j \otimes \zeta_i \zeta_j$, que l'on voit dans $V^{\otimes 2} \otimes V^{*\otimes 2}$. Via l'isomorphisme $V^{\otimes 2} \otimes V^{*\otimes 2} \simeq Hom((V^* \otimes V^*)^*, V^{\otimes 2})$, on associe à e^2 l'application $\lambda \mapsto \sum < \lambda, \zeta_i \zeta_j > x_i x_j$. Or, si $\lambda \in (V^* \otimes V^*)^*$ correspond à a via l'isomorphisme f, où $a = \sum a_{ij} x_i x_j$, alors pour tout $u \in V^* \otimes V^*$ tel que $u = \sum u_{ij} \zeta_i \zeta_j$, on a $\lambda(u) = \sum u_{ij} a_{ij}$. D'où ici :

$\sum < \lambda, \zeta_i\zeta_j > x_i x_j = \sum a_{ij} x_i x_j = a$. Donc e^2 correspond bien à l'application identité de $V^{\otimes 2}$. Donc, d'après le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
V^{\otimes 2} \otimes V^{*\otimes 2} \arrow[rr, "isom"] \arrow[d] & & Hom(V \otimes V, V \otimes V) \arrow[d] \\
A_2 \otimes A_2^! \arrow[dr, "isom"'] & & Hom(R, A_2) \arrow[dl, "isom"] \\
& Hom((A_2^!)^*, A_2) &
\end{tikzcd}$$

on a bien $e^2 = \widetilde{1_{V\otimes V}} = 0$ (la commutativité du diagramme résulte simplement de l'isomorphisme $V^{**} \simeq V$). ■

La multiplication à droite par e donne une application $A \otimes (A_n^!)^* \longrightarrow A \otimes (A_{n-1}^!)^*$, qui est la multiplication de l'algèbre sur A et le produit intérieur sur $(A_n^!)^*$. D'après la proposition précédente, on a un complexe de A-modules à gauche

$$A = A \otimes k = A \otimes (A_0^!)^* \xleftarrow{\times e} A \otimes (A_1^!)^* \xleftarrow{\times e} A \otimes (A_2^!)^* \xleftarrow{\times e} \cdots \tag{2.1}$$

et donc un complexe augmenté

$$0 \longleftarrow {}_A k \xleftarrow{\epsilon} A \xleftarrow{\times e} A \otimes (A_1^!)^* \xleftarrow{\times e} A \otimes (A_2^!)^* \xleftarrow{\times e} \cdots \tag{2.2}$$

où ϵ est la projection canonique.

Définition 2.3 *On dit que l'algèbre A est* de Koszul *si le complexe 2.1 est une résolution du module trivial ${}_A k$, i.e. si 2.2 est exact. Le complexe 2.1 est appelé* complexe de Koszul *de A.*

2.2 Le complexe $K'(A)$

Soit $K'(A) = A \otimes (A^!)^* \otimes A$, algèbre graduée par $K'(A)_m = A \otimes (A_m^!)^* \otimes A$. On définit sur $K'(A)$ deux différentielles de degré -1 comme suit : si $r \otimes f \otimes s \in K'(A)_m$,

$$b'_L(r \otimes f \otimes s) = \sum r x_i \otimes f \zeta_i \otimes s$$

$$b'_R(r \otimes f \otimes s) = \sum r \otimes \zeta_i f \otimes x_i s$$

Comme $e^2 = 0$, il est facile de vérifier que ${b'_L}^2 = {b'_R}^2 = 0$. De plus, on voit facilement que $b'_L \circ b'_R = b'_R \circ b'_L$. Si on pose $b' = b'_L + (-1)^m b'_R$, on a $b'^2 = 0$, et donc b' est aussi une différentielle.
$A_0^! = k$, donc $K'(A)_0 = A \otimes A$.
$A_1^! = V^*$, donc $K'(A)_1 = A \otimes V \otimes A$.

Si $r \otimes v \otimes s \in K'(A)_1$, alors $b'(r \otimes v \otimes s) = rv \otimes s - r \otimes vs$. Enfin, on définit l'augmentation

$$\begin{aligned} \mu : K'(A)_0 &\longrightarrow A \\ r \otimes s &\longmapsto rs. \end{aligned}$$

On a bien $\mu \circ b' = 0$. D'où le complexe :

$$0 \longleftarrow A \xleftarrow{\mu} K'(A)_0 \xleftarrow{b'} K'(A)_1 \xleftarrow{b'} \cdots \tag{2.3}$$

Proposition 2.4 *Supposons que l'algèbre A soit de Koszul. Alors le complexe*

$$0 \longleftarrow A \xleftarrow{\mu} K'(A)_0 \xleftarrow{b'} K'(A)_1 \xleftarrow{b'} \cdots$$

est exact, et $(K'(A), b')$ définit une résolution libre minimale du A-A bimodule A.

Pour prouver cette proposition, nous avons besoin de quelques résultats sur les modules gradués, en particulier du lemme de Nakayama gradué.

2.3 Modules gradués

Définition 2.5 *(A-modules gradués) Soit k un corps commutatif et A une k-algèbre graduée. On suppose que $A_0 = k$. Soit M un A-module à gauche. On dit que M est un module $\mathbf{Z}$-gradué sur A si M admet une décomposition $M = \bigoplus_{i=-\infty}^{+\infty} M_i$ en groupes abéliens, telle que $A_i M_j \subset M_{i+j} (\forall i, j)$.*

Si N est un sous-module de M, alors M/N peut être gradué par $(M/N)_i = (M_i + N)/N$. Soit M un A-module à droite gradué et N un A-module à gauche gradué. Alors le groupe abélien $M \otimes_A N$ peut être gradué par $(M \otimes_A N)_i = < x \otimes y; x \in M_\alpha, y \in N_\beta$ et $\alpha + \beta = i >$, on l'appelle le produit tensoriel gradué de M et N.
Un module M est dit *concentré en degré i* si $M = M_i$. Un module M est dit *pur en degré i* si $M = A.M_i$. Un module M est dit *libre gradué* s'il a une base formée d'éléments homogènes.

On définit de même les notions de A-A bimodules gradués, concentrés, purs...

Lemme 2.6 *Soit $\epsilon : A \to k$ la projection naturelle sur A_0, et soit $I = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots$ le noyau de ϵ. Soit M un A-A bimodule gradué.*
L'application $M \to M \otimes_A k, m \mapsto m \otimes_A 1$ définit un isomorphisme de $M/M.I$ sur $M \otimes_A k$.

Preuve. Si $m \in M.I$, alors $m \otimes_A 1_k = 0$. Donc l'application passe au quotient en $f : M/M.I \to M \otimes_A k$. Il est clair que cette application est surjective et injective. ∎

Lemme 2.7 *(lemme de Nakayama gradué)*
Soit M un A-A bimodule gradué borné inférieurement, i.e. tel qu'il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $M_i = 0$ si $i \leq n$. Si $k \otimes_A M = 0$, alors $M = 0$.

Preuve. Supposons $k \otimes_A M = 0$. D'après le lemme précédent, on a $M = M.I$. Supposons M non nul. Soit n le plus petit entier tel que $M_n \neq 0$. Alors $M_n \subset M.I$, ce qui est absurde. ■

Lemme 2.8 *Soit $f : M \longrightarrow M'$ un morphisme de A-A bimodules, où M' est borné inférieurement. Alors f est surjective si $f \otimes 1_k$ est surjective.*

Preuve. Supposons que $f \otimes 1_k$ est surjective. La suite $M \xrightarrow{f} M' \rightarrow coker(f) \rightarrow 0$ est exacte, donc la suite $M \otimes k \xrightarrow{f \otimes 1_k} M' \otimes k \rightarrow coker(f) \otimes k \rightarrow 0$ est exacte, par exactitude à droite de $- \otimes k$. Comme $f \otimes 1_k$ est surjective, on a donc $coker(f) \otimes k = 0$, et donc par le lemme de Nakayama gradué, $coker(f) = 0$: f est surjective. ■

Proposition 2.9 *Soit*

$$M'' \xrightarrow{g} M' \xrightarrow{f} M$$

un complexe de A-A bimodules où M' est borné inférieurement. Il est exact si le complexe de A-A bimodules suivant est exact :

$$M'' \otimes k \xrightarrow{g \otimes 1_k} M' \otimes k \xrightarrow{f \otimes 1_k} M \otimes k$$

Preuve. Supposons le second complexe exact. Le morphisme

$$M'' \otimes k \xrightarrow{g \otimes 1_k} ker(f \otimes 1_k)$$

est donc surjectif. On a $im(g \otimes 1_k) = im(g) \otimes 1_k$ et $ker(f) \otimes k \subset ker(f \otimes k)$. Alors le morphisme ci-dessus est égal à la composée

$$M'' \otimes k \xrightarrow{g \otimes 1_k} im(g) \otimes k \xrightarrow{i \otimes 1_k} ker(f) \otimes k \hookrightarrow ker(f \otimes k)$$

où i est l'injection de $im(g)$ dans $ker(f)$. Donc le morphisme

$$M'' \otimes k \xrightarrow{g \otimes 1_k} ker(f) \otimes k$$

est surjectif. Par le lemme précédent, $g : M'' \rightarrow ker(f)$ est surjective. ■

2.3.1 Preuve de la proposition 2.4

1. On tensorise le complexe 2.3 par $- \otimes_A k$, ce qui nous donne le complexe :

$$0 \longleftarrow A \otimes_A k \xleftarrow{b' \otimes_A 1_k} \cdots \longleftarrow (A \otimes (A^!_m)^* \otimes A) \otimes_A k \xleftarrow{b' \otimes_A 1_k} \cdots$$

où k est vu comme un A-A bimodule pour la multiplication triviale. On a les isomorphismes :

$$A \otimes k \simeq k$$

$$(A \otimes (A^!_m)^* \otimes A) \otimes_A k \simeq (A \otimes (A^!_m)^*) \otimes (A \otimes_A k) \simeq (A \otimes (A^!_m)^*) \otimes k \simeq A \otimes (A^!_m)^*.$$

Ce sont des isomorphismes de A-A bimodules, $A \otimes (A^!_m)^*$ est muni de la multiplication à gauche et de la multiplication triviale à droite.
Montrons que le complexe ci-dessus est isomorphe au complexe de Koszul.

$$(r \otimes f \otimes s) \otimes_A a \overset{b' \otimes_A 1_k}{\mapsto} \left(\sum r x_i \otimes f \zeta_i \otimes s + (-1)^m \sum r \otimes \zeta_i f \otimes x_i s \right) \otimes_A a$$

Soit, en écrivant cette application dans $A \otimes (A^!_m)^*$ via l'isomorphisme,

$$\epsilon(s).a.r \otimes f \mapsto ((\epsilon(s).a).r \otimes f).e,$$

ce qui est bien la différentielle du complexe de Koszul. Donc ces deux complexes de bimodules sont isomorphes.

2. Par hypothèse, le complexe de Koszul est exact. Puisque c'est l'image par $- \otimes_A k$ du complexe initial, d'après la proposition 2.9, le complexe 2.3 est exact.

2.4 Premiers résultats sur l'homologie de Hochschild de l'algèbre A

2.4.1 Définition de l'homologie de Hochschild

Soit A une k-algèbre associative. On définit alors le complexe $(C(A), b)$, donné par $C(A)_n = A^{\otimes(n+1)}$, et

$$b(r_0 \otimes \cdots \otimes r_n) = (-1)^n r_n r_0 \otimes \cdots \otimes r_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i r_0 \otimes \cdots \otimes r_i r_{i+1} \otimes \cdots \otimes r_n$$

Alors, *l'homologie de Hochschild de A* est l'homologie du complexe $C(A)$. On la note $HH_*(A)$.

2.4.2 Une autre méthode de calcul de l'homologie de Hochschild de A

Ici, A est l'algèbre quadratique définie au début du 2. Soit $K(A) = A \otimes (A^!)^*$, gradué par $K(A)_m = A \otimes (A^!_m)^*$. On définit les différentielles suivantes : si $r \otimes f \in K(A)_m$,

$$b_L(r \otimes f) = \sum r x_i \otimes f \zeta_i = (r \otimes f).e$$

$$b_R(r \otimes f) = \sum x_i r \otimes \zeta_i f = e.(r \otimes f)$$

On voit que $b_L^2 = b_R^2 = 0$, et que $b_L \circ b_R = b_R \circ b_L$. Donc $b = b_L + (-1)^m b_R$ est également une différentielle.

Proposition 2.10 *Supposons que A est de Koszul. Alors $HH_*(A) = H_*(K(A), b)$.*

Preuve. 1. On sait que $HH_*(A) = Tor^{A\otimes A^o}(A, A)$. Le complexe $K'(A)$ est une résolution libre de A comme $A \otimes A^o$- module, d'après la proposition précédente. Le complexe

$$A \otimes_{A\otimes A^o} K'(A)_0 \xleftarrow{1\otimes b'} A \otimes_{A\otimes A^o} K'(A)_1 \xleftarrow{1\otimes b'} A \otimes_{A\otimes A^o} K'(A)_2 \xleftarrow{1\otimes b'} \cdots$$

permet donc de calculer $Tor^{A\otimes A^o}(A, A)$. Montrons que ce complexe est isomorphe au complexe $K(A)$, ce qui permettra de conclure.
2.

$$\begin{aligned} A \otimes_{A\otimes A^o} K'(A)_m &= A \otimes_{A\otimes A^o} (A \otimes (A^!_m)^* \otimes A) \\ &\simeq A \otimes_{A\otimes A^o} ((A \otimes A^o) \otimes (A^!_m)^*) \\ &\simeq (A \otimes_{A\otimes A^o} (A \otimes A^o)) \otimes (A^!_m)^* \\ &\simeq A \otimes (A^!_m)^* \end{aligned}$$

où tous ces isomorphismes sont des isomorphismes de $A\otimes A^o$ - modules. Donc :

$$A \otimes_{A\otimes A^o} K'(A)_m \simeq K(A)_m$$

Cet isomorphisme s'écrit explicitement :

$$\begin{aligned} a \otimes_{A\otimes A^o} (b \otimes f \otimes c) &\mapsto a \otimes_{A\otimes A^o} (b \otimes c \otimes f) \\ &\mapsto (a \otimes_{A\otimes A^o} (b \otimes c)) \otimes f \\ &\mapsto (cab) \otimes f \end{aligned}$$

Montrons que les différentielles b et $1 \otimes b'$ sont les mêmes modulo l'isomorphisme ci-dessus. Soit $a \otimes f \in K(A)_m$.

$$a \otimes f \mapsto a \otimes_{A\otimes A^o} (1 \otimes f \otimes 1) \in A \otimes_{A\otimes A^o} K'(A)_m$$

$$\begin{aligned} (1 \otimes b')(a \otimes_{A\otimes A^o} (1 \otimes f \otimes 1)) &= a \otimes b'(1 \otimes f \otimes 1) \\ &= a \otimes (\sum x_i \otimes f\zeta_i \otimes 1 + (-1)^m . \sum 1 \otimes \zeta_i f \otimes x_i) \\ &\mapsto \sum (ax_i) \otimes (f\zeta_i) + (-1)^m . \sum (x_i a) \otimes (\zeta_i f) \end{aligned}$$

Donc b et $1 \otimes b'$ sont bien les mêmes modulo l'isomorphisme. ■

2.4.3 Une autre présentation du complexe de Koszul

Proposition 2.11 *Posons* $J_m = \bigcap_{i+j+2=m} V^{\otimes i} \otimes R \otimes V^{\otimes j}$. *On a un isomorphisme de k-espaces vectoriels* $\varphi : J_m \longrightarrow (A^!_m)^*$.

Preuve.
1. On a un isomorphisme d'espaces vectoriels :

$$\begin{array}{rcl} \phi : V^{\otimes m} & \longrightarrow & (V^{*\otimes m})^* \\ x_1 \otimes \cdots \otimes x_m & \mapsto & [\lambda_1 \otimes \cdots \otimes \lambda_m \mapsto \lambda_1(x_1)\cdots\lambda_m(x_m)]. \end{array}$$

D'où une application linéaire $\phi : J_m \longrightarrow (V^{*\otimes m})^*$. Si $\lambda \in I(R^\perp)_m$, alors pour tout $x \in J_m$, $\phi(x)(\lambda) = 0$: en effet, si $x \in \bigcap_{i+j+2=m} V^{\otimes i} \otimes R \otimes V^{\otimes j}$, alors $x \in I(R)$.
D'où une application $\varphi : J_m \longrightarrow (V^{*\otimes m}/I(R^\perp))^* = (A^!_m)^*$. Il faut montrer que φ est un isomorphisme.
2. Montrons que φ est surjective. Soit $f : V^{*\otimes m} \to k$, nulle sur $I(R^\perp)_m = \sum_{i+j+2=m} V^{*\otimes i} \otimes R^\perp \otimes V^{*\otimes j}$. Comme ϕ est un isomorphisme, il existe $a \in V^{\otimes m}$ tel que $f = \phi(a)$. Alors $f : \lambda \mapsto < \lambda, a >$. Donc pour tout $\alpha \in V^{*\otimes i} \otimes R^\perp \otimes V^{*\otimes j}$, on a $< \alpha, a >= 0$, et donc $a \in V^{\otimes i} \otimes {R^\perp}^\perp \otimes V^{\otimes j} = V^{\otimes i} \otimes R \otimes V^{\otimes j}$. Donc $a \in J_m$.
3. Montrons que $dim((A^!_m)^*) = dim(J_m)$, ce qui permettra de conclure.

$$\begin{aligned} dim((A^!_m)^* &= dim(V^{*\otimes m}/(R^\perp)) \\ &= dim(V^{*\otimes m}) - dim(\sum_{i+j+2=m} V^{*\otimes i} \otimes R^\perp \otimes V^{*\otimes j}) \\ &= dim(V^{\otimes m}) - dim((\bigcap_{i+j+2=m} V^{\otimes i} \otimes R \otimes V^{\otimes j})^\perp) \\ &= dim(V^{\otimes m}) - dim(V^{\otimes m}) + dim(\bigcap_{i+j+2=m} V^{\otimes i} \otimes R \otimes V^{\otimes j}) \\ &= dim(J_m) \end{aligned}$$

■

On définit le complexe :

$$\cdots \longrightarrow A \otimes J_m \xrightarrow{\delta} A \otimes J_{m-1} \xrightarrow{\delta} \cdots \xrightarrow{\delta} A \xrightarrow{\epsilon} k \tag{2.4}$$

où

$$\begin{array}{rcl} \delta : A \otimes J_m & \longrightarrow & A \otimes J_{m-1} \\ a \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_m & \longmapsto & av_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_m \end{array}$$

$\delta^2(a \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_m) = av_1v_2 \otimes v_3 \otimes \cdots \otimes v_m$. Or $v_1 \otimes \cdots \otimes v_m \in R \otimes V^{\otimes m-2}$, donc $v_1v_2 = 0$ dans A. Donc $\delta^2 = 0$, et δ est bien une différentielle.

Proposition 2.12 *Le complexe 2.4 et le complexe de Koszul 2.1 sont isomorphes.*

Preuve. Il reste à montrer que l'application $1_A \otimes \varphi$ définit bien un morphisme de complexes. Montrons pour cela que $(1_A \otimes \varphi_{m-1}) \circ \delta = b \circ (1_A \otimes \varphi_m)$.

$$b \circ (1_A \otimes \varphi_m)(a \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_m) = b(a \otimes [\lambda_1 \otimes \cdots \otimes \lambda_m \mapsto \lambda_1(v_1) \cdots \lambda_m(v_m)]) = b(a \otimes f_m)$$

où $f_m = [\lambda_1 \otimes \cdots \otimes \lambda_m \mapsto \lambda_1(v_1) \cdots \lambda_m(v_m)]$. Or $b(a \otimes f_m) = \sum ax_i \otimes f_m \zeta_i$, et $f_m \zeta_i = f_{m-1}.\zeta_i(v_1)$. D'où :

$$\begin{aligned} b(a \otimes f_m) &= \sum ax_i \otimes f_{m-1}\zeta_i(v_1) \\ &= (\sum \zeta_i(v_1) a x_i) \otimes f_{m-1} \\ &= av_1 \otimes f_{m-1} \end{aligned}$$

où $f_{m-1} = [\lambda_2 \otimes \cdots \otimes \lambda_m \mapsto \lambda_2(v_2) \cdots \lambda_m(v_m)]$. D'autre part :

$$(1_A \otimes \varphi_{m-1}) \circ \delta(a \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_m) = (1_A \otimes \varphi_{m-1})(av_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_m) = av_1 \otimes f_{m-1}$$

D'où l'égalité. ∎

2.4.4 Un quasi-isomorphisme explicite

Les deux complexes $C(A)$ et $K(A)$ calculent tous deux l'homologie de Hochschild de A, il sont donc quasi-isomorphes. En fait, il y a un quasi-isomorphisme facile à écrire, que nous allons expliciter.
D'après la proposition 2.11, on a une application $q : A \otimes (A_m^*)^! \to A \otimes A^{\otimes m}$ qui est simplement la restriction de l'inclusion $A \otimes V^{\otimes m} \hookrightarrow A \otimes A^{\otimes m}$.

Proposition 2.13 *$q : K(A) \to C(A)$ est un quasi-isomorphisme.*

Preuve. 1. On a $(C(A), b) = A \otimes_{A \otimes A^0} (C'(A), b_1)$, où $C'(A)$ est le complexe défini par $C'(A)_m = A^{\otimes(m+2)}$, et

$$b_1(r_0 \otimes \cdots \otimes r_{m+1}) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i r_0 \otimes \cdots \otimes r_i r_{i+1} \otimes \cdots \otimes r_{m+1}$$

$(C'(A), b_1)$ est une résolution libre de A comme A-A bimodule (c'est la "bar-résolution", cf [11] par exemple), avec $\epsilon : C'(A)_0 \to A$ donnée par $a \otimes b \mapsto ab$.

2. On définit un morphisme gradué $q' : K'(A) \to C'(A)$, qui en degré m est la restriction de l'inclusion naturelle : $A \otimes V^{\otimes m} \otimes A \hookrightarrow A \otimes A^{\otimes m} \otimes A$. On a $1_A \otimes_{A \otimes A^0} q' = q$ modulo l'isomorphisme entre $C(A)$ et $A \otimes_{A \otimes A^0} C'(A)$: via cet isomorphisme, on a $a \otimes f \mapsto a \otimes_{A \otimes A^0} (1 \otimes f \otimes 1)$, donc

$$(1_A \otimes_{A \otimes A^0} q')(a \otimes_{A \otimes A^0} (1 \otimes f \otimes 1)) = a \otimes_{A \otimes A^0} (1 \otimes f \otimes 1) \mapsto a \otimes f$$

3. Montrons que q' est un morphisme de complexes. La différentielle b' de $K'(A)$ est la restriction de l'application :

$$\begin{array}{rcl} A\otimes V^{\otimes m}\otimes A & \longrightarrow & A\otimes V^{\otimes(m-1)}\otimes A \\ r\otimes v_1\otimes\cdots\otimes v_m\otimes s & \mapsto & rv_1\otimes v_2\otimes\cdots\otimes v_m\otimes s+(-1)^m r\otimes v_1\otimes\cdots\otimes v_{m-1}\otimes v_m s \end{array}$$

Ceci peut se montrer avec la même preuve que dans la proposition 2.11. Soit $r,s\in A$, et $f\in J_m : f=\sum_j v_1^j\otimes ...\otimes v_m^j$, où $v_i^j\in V$. Alors :

$$\begin{aligned} .q'\circ b'(r\otimes f\otimes s) &= q'(\sum_j rv_1^j\otimes\cdots\otimes v_m^j\otimes s+(-1)^m\sum_j r\otimes v_1^j\otimes\cdots\otimes v_m^j s) \\ &= \sum_j rv_1^j\otimes\cdots\otimes v_m^j\otimes s+(-1)^m\sum_j r\otimes v_1^j\otimes\cdots\otimes v_m^j s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} .b_1\circ q'(r\otimes f\otimes s) &= b_1(r\otimes f\otimes s) \\ &= \sum_j\sum_{i=0}^{m}(-1)^i r\otimes v_1^j\otimes\cdots\otimes v_i^j v_{i+1}^j\otimes\cdots\otimes s \\ &= \sum_j rv_1^j\otimes v_2^j\otimes\cdots\otimes s+(-1)^m.\sum_j r\otimes v_1^j\otimes\cdots\otimes v_{m-1}^j\otimes v_m^j s+\cdots \\ \cdots &\quad +\sum_j\sum_{i=1}^{m-1}(-1)^i r\otimes v_1^j\otimes\cdots\otimes v_i^j v_{i+1}^j\otimes\cdots\otimes s \end{aligned}$$

Or $f\in J_m=V^{\otimes i-1}\otimes R\otimes V^{\otimes m-i+1}$ et donc toutes les sommes avec $i=1,\ldots,m-1$ sont nulles. Donc $q'b'=b_1q'$. On a facilement $q'\epsilon=\epsilon q'$, donc q' est un morphisme de complexes.

4. D'après le théorème de comparaison entre deux résolutions, il existe un autre morphisme de complexes $f:C'(A)\longrightarrow K'(A)$. On sait alors que $Id_{K'(A)}$ et $f\circ q'$ sont homotopes : $f\circ q'-Id_{K'(A)}=b'\circ s+s\circ b_1$. Donc $(1\otimes f)\circ(1\otimes q')-Id_{A\otimes K'(A)}=(1\otimes b')\circ(1\otimes s)+(1\otimes s)\circ(1\otimes b_1)$. D'où, en passant à l'homologie :

$$H((1\otimes f)\circ(1\otimes q'))-H(Id_{A\otimes K'(A)})=0$$

$$H(1\otimes f)\circ H(1\otimes q')=Id_{A\otimes K'(A)}$$

Donc $H(1\otimes q')$ est inversible à droite. De même, il est inversible à gauche, et donc $H(1\otimes q')$ est un isomorphisme, c'est à dire que $1\otimes q'=q$ est bien un quasi-isomorphisme. ■

3 Un exemple : une algèbre d'Artin-Schelter de type A

3.1 Algèbres de type A

Définition 3.1 *Une* algèbre régulière d'Artin-Schelter de type A quadratique *(voir [2]) est une algèbre de la forme*

$$A = k < x_1, x_2, x_3 > /(f_1, f_2, f_3)$$

avec

$$f_1 = ax_2x_3 + bx_3x_2 + cx_1^2 \quad (3.5)$$
$$f_2 = ax_3x_1 + bx_1x_3 + cx_2^2 \quad (3.6)$$
$$f_3 = ax_1x_2 + bx_2x_1 + cx_3^2 \quad (3.7)$$

où $(a, b, c) \in k^3$*. De plus, on suppose que l'on a ni la relation* $a^3 = b^3 = c^3$*, ni deux des trois variables* a*,* b*,* c *nulles.*

3.1.1 Quelques résultats supplémentaires sur la catégorie des modules gradués

Définition 3.2 *Soit* $f : M \longrightarrow M'$ *un morphisme de* A*-modules gradués. On dit que* f *est essentiel si pour tout morphisme* $\phi : X \longrightarrow M$ *tel que* $f \circ \phi$ *est surjectif,* ϕ *est surjectif.*

Proposition 3.3 *Soit* $f : M \longrightarrow M'$ *un morphisme de* A*-modules gradués.*
(i) On suppose M' *borné inférieurement. Si* f *est surjectif et essentiel (ce qui équivaut à dire que la restriction de* f *à un sous-module strict de* M *n'est jamais surjective), alors* $1_k \otimes_A f : k \otimes_A M \longrightarrow k \otimes_A M'$ *est bijectif. La réciproque est vraie si de plus* M *est borné inférieurement.*
(ii) Supposons f *surjectif et* M *pur en degré* l*. Alors* f *est essentiel si et seulement si* $f_l : M_l \longrightarrow M'_l$ *est bijectif (voir [5]).*

Preuve. (i) Supposons f surjectif et essentiel. On a déjà vu que $1_k \otimes_A f$ est surjectif. Soit N son noyau, et Y un supplémentaire du sous-espace vectoriel gradué N de $k \otimes_A M$. Notons $\pi : M \longrightarrow k \otimes_A M$ l'application canonique. Soit X un sous-module de M tel que $\pi(X) = Y$. Notons $\phi : X \longrightarrow M$ l'injection canonique. Alors $1_k \otimes_A (f \circ \phi)$ s'identifie à $1_k \otimes_A f : Y \longrightarrow k \otimes_A M'$ qui est surjectif par définition de Y. D'après le lemme 2.8, $f \circ \phi : X \longrightarrow M'$ est surjectif. Puisque f est essentiel, ϕ est surjectif, i.e. $X = M$. Donc $Y = \pi(X) = k \otimes_A M$, et $N = 0$.
Réciproquement, supposons que M est borné inférieurement et que $1_k \otimes_A f$

est bijectif. Alors le lemme 2.8 implique que f est surjectif. Soit $\phi : X \longrightarrow M$ tel que $f \circ \phi$ est surjectif. Alors $1_k \otimes_A (f \circ \phi)$ est surjectif, donc aussi $1_k \otimes_A \phi$. Donc, encore d'après 2.8, ϕ est surjectif.
(ii) M' est pur en degré l, on peut donc appliquer (i). On applique le résultat suivant pour conclure : si M est pur en degré l, l'application $M_l \longrightarrow k \otimes_A M$, $m \mapsto 1 \otimes_A m$ est un isomorphisme k-linéaire. ■

Proposition 3.4 *Soit $f : M \longrightarrow M'$ un morphisme surjectif essentiel de A-modules gradués. Supposons M' projectif. Alors f est un isomorphisme.*

Preuve. Comme M' est projectif, le noyau N de f possède dans M un sous-module supplémentaire X. La restriction de f à X est surjective, donc $X = M$ et $N = 0$. ■

Définition 3.5 *Soit M un A-module gradué. Une* couverture projective *de M est un couple (P, f) où P est un A-module gradué projectif et $f : P \longrightarrow M$ est un morphisme surjectif essentiel.*

Supposons qu'on ait deux couvertures projectives (P, f) et (P', f') d'un A-module gradué M. Comme P est projectif, f se factorise en $f' \circ g$. Puisque f' est essentiel, g est surjectif. Comme $f' \circ g$ est essentiel, g est essentiel. Alors la proposition précédente implique que g est un isomorphisme. Donc la couverture projective de M est unique à un isomorphisme près.
Citons enfin les deux résultats suivants :

Théorème 3.6 *Soit M un A-module borné inférieurement. Alors M possède une couverture projective. Toute couverture projective (P, f) de M est telle que P est libre-gradué et borné inférieurement.*

Corollaire 3.7 *Soit M un module gradué projectif borné inférieurement. Alors M est libre-gradué.*

3.1.2 Définition équivalente des algèbres de Koszul

Définition 3.8 *Soit A une k-algèbre graduée quadratique. On dit que A est de Koszul au sens de Beilinson, Ginzburg et Soergel (BGS) (voir [3]) s'il existe une résolution projective graduée de k de la forme :*

$$\cdots \xrightarrow{d_3} P^2 \xrightarrow{d_2} P^1 \xrightarrow{d_1} P^0 \xrightarrow{d_0} k \longrightarrow 0 \tag{3.8}$$

dans laquelle $P^i = A.P^i_i$ pour tout $i \geq 0$, c'est à dire que P^i est pur en degré i pour tout $i \geq 0$.

On va montrer que cette définition est équivalente à celle que nous avons donnée dans la définition 2.3. Si l'algèbre A est de Koszul au sens de la définition 2.3, elle est de Koszul au sens BGS. En effet, si le complexe de Koszul 2.4

est exact, c'est une résolution projective graduée de k. De plus, $(A \otimes J_i)_i = J_i$, et donc $A \otimes J_i$ est bien engendré en degré i. Le complexe de Koszul vérifie bien les hypothèses de la définition précédente, donc A est de Koszul au sens BGS. La réciproque est plus difficile, et est montrée dans la proposition suivante :

Proposition 3.9 *Si A est de Koszul au sens de BGS, alors elle est de Koszul au sens de la définition 2.3.*

Preuve.
Supposons en effet l'algèbre A de Koszul au sens de BGS. On va construire un isomorphisme de complexes f entre les complexes 2.4 et 3.8 :

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \xrightarrow{\delta} & A \otimes R & \xrightarrow{\delta} & A \otimes V & \xrightarrow{\delta} & A & \xrightarrow{\epsilon} & k & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 & & \downarrow Id & & \\ \cdots & \xrightarrow{d} & P^2 & \xrightarrow{d} & P^1 & \xrightarrow{d} & P^0 & \xrightarrow{d_0} & k & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Comme le second complexe est exact, on en déduira que le complexe de Koszul est exact.

Lemme 3.10 *La résolution projective 3.8 est minimale. Ceci signifie que pour tout $i \geq 0$, $P^i \xrightarrow{d_i} im(d_i)$ est une couverture projective, c'est à dire que le morphisme surjectif $P^i \xrightarrow{d_i} im(d_i)$ est essentiel.*

Preuve. Comme $P^i \xrightarrow{d_i} im(d_i)$ est surjectif et comme P^i est engendré en degré i, il suffit de vérifier que $P^i_i \xrightarrow{d_i} im(d_i)_i$ est injectif, d'après la proposition 3.3. Or on a $(ker(d_i))_i = (im(d_{i+1}))_i = 0$ car P^{i+1} est engendré en degré $i+1$ et d est homogène de degré 0. ■

Passons à la construction par récurrence de l'isomorphisme f. D'après le lemme, $A \xrightarrow{\epsilon} k$ et $P^0 \xrightarrow{d_0} k$ sont deux couvertures projectives de k. Il existe alors un isomorphisme $f_0 : A \longrightarrow P^0$ tel que le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\epsilon} & k & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow f_0 & & \downarrow Id & & \\ P^0 & \xrightarrow{d_0} & k & \longrightarrow & 0 \end{array} \qquad \text{commute.}$$

Supposons construits les isomorphismes $f_0, \ldots, f_{i-1}$ tels que le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccccccc} A \otimes J_{i-1} & \xrightarrow{\delta_{i-1}} & \cdots & \xrightarrow{\delta_1} & \text{A} & \longrightarrow & k & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow f_{i-1} & & & & \downarrow f_0 & & \downarrow Id & & \\ P^{i-1} & \xrightarrow{d_{i-1}} & \cdots & \xrightarrow{d_1} & P^0 & \xrightarrow{d_0} & k & \longrightarrow & 0 \end{array} \qquad \text{commute.}$$

On a $d_{i-1}f_{i-1}\delta_i = 0$, car $d_{i-1}f_{i-1} = f_{i-2}\delta_{i-1}$ et $\delta_{i-1}\delta_i = 0$. Comme $im(d_i) = ker(d_{i-1})$, on a une application $f_{i-1}\delta_i : A \otimes J_i \longrightarrow im(d_i)$. Comme $A \otimes J_i$ est projectif, il existe une application $f_i : A \otimes J_i \longrightarrow P^i$ telle que le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} & & A\otimes J_i & & \\ & f_i \swarrow & \downarrow f_{i-1}\delta_i & & \\ P^i & \xrightarrow{d_i} & im(d_i) & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad \text{commute.}$$

On a donc construit f_i tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} A\otimes J_i & \xrightarrow{\delta_i} & A\otimes J_{i-1} \\ \downarrow f_i & & \downarrow f_{i-1} \\ P^i & \xrightarrow{d_i} & P^{i-1} \end{array}$$

Il reste à prouver que f_i est un isomorphisme. Il est clair d'après le diagramme construit précédemment que $f_{i-1}(ker\delta_{i-1}) = kerd_{i-1}$.
On rappelle que l'application $\delta_{i-1} : A\otimes J_{i-1} \longrightarrow A\otimes J_{i-2}$ se construit naturellement à partir de l'injection $J_{i-1} \longrightarrow V\otimes J_{i-2}$. En particulier, on a $(ker\delta_{i-1})_i = (V\otimes J_{i-1})\bigcap(R\otimes J_{i-2}) = J_i$. Donc $(\delta_i)_i : J_i \longrightarrow (ker\delta_{i-1})_i$ est l'identité. On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} J_i & \xrightarrow{(\delta_i)_i} & (ker\delta_{i-1})_i \\ \downarrow f_i & & \downarrow (f_{i-1})_i \\ (P^i)_i & \xrightarrow{(d_i)_i} & (imd_i)_i \end{array}$$

où $(\delta_i)_i, (f_{i-1})_i, (d_i)_i$ sont des isomorphismes. Donc $(f_i)_i : J_i \longrightarrow P_i^i$ est bijectif. Comme $P^i = A.P_i^i$, on en déduit que $f_i : A\otimes J_i \longrightarrow P^i$ est surjectif. Donc $f_{i-1}\delta_i = d_i f_i : A\otimes J_i \longrightarrow im(d_i)$ est surjectif. Comme c'est un isomorphisme en degré i, d'après la proposition 3.3 (ii), on a que $f_{i-1}\delta_i : A\otimes J_i \longrightarrow im(d_i)$ est une couverture projective de $im(d_i)$. Comme $P^i \xrightarrow{d_i} im(d_i)$ est aussi une couverture projective, f_i est un isomorphisme. ■

3.2 Complexe de Koszul des algèbres de type A

Nous allons voir que dans le cas des algèbres de type A, le complexe $K(A)$ s'exprime assez facilement. Ce complexe est en effet isomorphe au complexe :

$$0 \longrightarrow A(-3) \xrightarrow{x-x^o} A(-2)^3 \xrightarrow{M+M^{ot}} A(-1)^3 \xrightarrow{x^t-x^{ot}} A \xrightarrow{\epsilon} k \longrightarrow 0 \tag{3.9}$$

où $x = (x_1, x_2, x_3)$, et

$$M = \begin{pmatrix} cx_1 & bx_3 & ax_2 \\ ax_3 & cx_2 & bx_1 \\ bx_2 & ax_1 & cx_3 \end{pmatrix}$$

On note aussi $f^t = (f_1, f_2, f_3)$. Notons qu'on a les relations: $f = Mx^t$, et $f^t = xM$. Le symbole $()^o$ signifie qu'on multiplie à gauche, c'est à dire $xy^o = yx$.

Pour montrer ceci, on considère tout d'abord le complexe "non symétrisé" suivant :

$$0 \longrightarrow A(-3) \xrightarrow{x} A(-2)^3 \xrightarrow{M} A(-1)^3 \xrightarrow{x^t} A \xrightarrow{\epsilon} k \longrightarrow 0 \tag{3.10}$$

Les flèches surmontées de x, M, x^t, signifient que l'on multiplie à droite par x, M et x^t. Il est clair que $im(x^t) = ker(\epsilon) = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots$. C'est bien un complexe, puisque $Mx^t = f = 0$ dans A, et $xM = f^t = 0$ dans A.
On a donc ainsi le début d'une résolution projective minimale. Puis, comme A est régulière au sens d'Artin et Schelter, c'est à dire en particulier qu'elle est de dimension globale 3 et qu'elle vérifie la propriété de Gorenstein, on peut compléter ce début de résolution en la résolution projective minimale ci-dessus (voir [2]).
C'est donc une résolution projective P graduée de k dont chaque P^i est pur en degré i. On en déduit d'après la preuve de la proposition 3.9 que ce complexe est isomorphe au complexe de Koszul, et que l'algèbre A est de Koszul.
Nous allons de plus expliciter cet isomorphisme, pour cela on utilise la version 2.4 du complexe de Koszul :

$$\cdots \longrightarrow A \otimes J_3 \xrightarrow{\delta} A \otimes R \xrightarrow{\delta} A \otimes V \xrightarrow{\delta} A \xrightarrow{\epsilon} k \tag{3.11}$$

L'espace V a pour base x_1, x_2, x_3, donc tout élément de $A \otimes V$ s'écrit $u \otimes x_1 + v \otimes x_2 + w \otimes x_3$. Donc l'application δ_1 s'écrit bien via l'identification $u \otimes x_1 + v \otimes x_2 + w \otimes x_3 \mapsto (u, v, w)$ comme :

$$\begin{array}{ccc} A(-1)^3 & \longrightarrow & A \\ (u, v, w) & \mapsto & ux_1 + vx_2 + wx_3 \end{array}$$

De même, R a pour base f_1, f_2, f_3, et un élément de $A \otimes R$ s'écrit $u \otimes f_1 + v \otimes f_2 + w \otimes f_3$, en voyant f_1, f_2, f_3 comme des éléments de $V^{\otimes 2}$. L'application δ_2 s'écrit bien via l'identification $u \otimes f_1 + v \otimes f_2 + w \otimes f_3 \mapsto (u, v, w)$ comme :

$$\begin{array}{ccc} A(-2)^3 & \longrightarrow & A(-1)^3 \\ (u, v, w) & \mapsto & (u, v, w)M \end{array}$$

Enfin, l'élément $x_1 \otimes f_1 + x_2 \otimes f_2 + x_3 \otimes f_3$ forme une base de J_3, et un élément de $A \otimes J_3$ s'écrit $u \otimes (x_1 \otimes f_1 + x_2 \otimes f_2 + x_3 \otimes f_3)$. L'application δ_3 s'écrit bien via l'identification $u \otimes (x_1 \otimes f_1 + x_2 \otimes f_2 + x_3 \otimes f_3) \mapsto u$ comme :

$$\begin{array}{ccc} A(-3) & \longrightarrow & A(-2)^3 \\ u & \mapsto & u.(x_1, x_2, x_3) \end{array}$$

On a donc l'isomorphisme explicite souhaité. On en déduit le complexe "symétrisé" $K(A)$. Via l'isomorphisme ci-dessus, c'est le complexe :

$$0 \longrightarrow A(-3) \stackrel{x-x^o}{\longrightarrow} A(-2)^3 \stackrel{M+M^{ot}}{\longrightarrow} A(-1)^3 \stackrel{x^t-x^{ot}}{\longrightarrow} A \stackrel{\epsilon}{\longrightarrow} k \longrightarrow 0 \qquad (3.12)$$

D'après la proposition 2.10, on a donc une première méthode de calcul de l'homologie de Hochschild de A, en calculant l'homologie du complexe $K(A)$. Cependant, cette méthode ne parait pas applicable, car les calculs à effectuer sont trop difficiles. Nous allons utiliser une autre méthode pour calculer l'homologie de Hochschild de l'algèbre A.

Soit $\Delta = 1 \in K(A_3) = A(-3)$ et $\Pi = (x_1, x_2, x_3) \in K(A)_2 = A(-2)^3$. On a $b\Delta = b\Pi = 0$. D'après ce qui précède :

$$q(\Pi) = x_1 \otimes f_1 + x_2 \otimes f_2 + x_3 \otimes f_3 \in A^{\otimes 3}$$

$$q(\Delta) = 1 \otimes (x_1 \otimes f_1 + x_2 \otimes f_2 + x_3 \otimes f_3) = 1 \otimes q(\Pi) \in A^{\otimes 4}$$

Π et Δ définissent donc des éléments de $HH_2(A)$ et $HH_3(A)$ que l'on notera aussi Π et Δ.

3.3 Homologie de Hochschild, cohomologie de de Rham et homologie cyclique de A

3.3.1 Définition de la cohomologie de de Rham et de l'homologie cyclique

Les définitions qui suivent se trouvent dans [1] ou [10].

Définition 3.11 *Un complexe mixte est un triplet (M, b, B) où M est un k-espace vectoriel $\mathbf{N}$-gradué, et b et B sont des différentielles de degrés -1 et +1, vérifiant les relations $b^2 = B^2 = bB + Bb = 0$.*

Considérons l'homologie $H_*(M) = H_*(M, b)$ du complexe sous-jacent (M, b). Alors B induit une différentielle de degré 1 sur $H_*(M)$, et la cohomologie du complexe $(H_*(M), B)$ est appelée la *cohomologie de De Rham* de (M, b, B) et est notée $H^*_{DR}(M)$. Considérons le bicomplexe :

$$
\begin{array}{ccccccc}
\downarrow b & & \downarrow b & & \downarrow b & & \\
M_2 & \xleftarrow{B} & M_1 & \xleftarrow{B} & M_0 & \longleftarrow & 0 \\
\downarrow b & & \downarrow b & & \downarrow & & \\
M_1 & \xleftarrow{B} & M_0 & \longleftarrow & 0 & & \\
\downarrow b & & \downarrow & & & & \\
M_0 & \longleftarrow & 0 & & & & \\
\downarrow & & & & & & \\
0 & & & & & &
\end{array}
$$

On a alors un complexe :

$$\cdots \xrightarrow{b+B} M_0 \oplus M_2 \oplus M_4 \xrightarrow{b+B} M_1 \oplus M_3 \xrightarrow{b+B} M_0 \oplus M_2 \xrightarrow{b+B} M_1 \xrightarrow{b+B} M_0 \quad (3.13)$$

On l'appelle le complexe total associé à (M, b, B). L'homologie de ce complexe est appelée l'homologie cyclique de (M, b, B) et est notée $HC_*(M)$.

Si A est une k-algèbre associative, on définit un complexe mixte $(C(A), b, B)$ où $C(A)$ et b sont définis comme dans la partie 2.4.1, et on définit B par :

$$B(r_0 \otimes \cdots \otimes r_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{ni} 1 \otimes r_i \otimes \cdots \otimes r_n \otimes r_0 \otimes \cdots \otimes r_{i-1}$$

$$+(-1)^n \sum_{i=0}^{n} (-1)^{ni} r_i \otimes \cdots \otimes r_n \otimes r_0 \otimes \cdots \otimes r_{i-1} \otimes 1$$

On définit alors la cohomologie de De Rham et l'homologie cyclique de A par : $H^*_{DR}(A) = H^*_{DR}(C(A))$ et $HC_*(A) = HC_*(C(A))$.

3.3.2 Homologie de Hochschild, cohomologie de de Rham et homologie cyclique de A

On note $C_3 = c(c^3 - b^3)x_2^3 + b(c^3 - a^3)x_2x_1x_3 + a(b^3 - c^3)x_1x_2x_3 + c(a^3 - c^3)x_1^3$. On montre que C_3 est dans le centre de A (cf [2]).

Définition 3.12 *Soit M un A-module gradué (avec une graduation positive), où A est une k-algèbre graduée. Alors la série de Hilbert de M est :*

$$H(M, t) = \sum_{n=0}^{\infty} dim_k(M_n) t^n$$

Théorème 3.13 *Soit A une algèbre régulière d'Artin-Schelter de type A, quadratique. On suppose qu'elle est générique, c'est à dire telle que les coefficients a, b, c sont algébriquement indépendants sur $\mathbf{Q} \subset k$. Alors les $(HH_i(A))_{i=0..3}$*

sont des $k[C_3]$-modules libres de rang 8,8,1,1. $HH_2(A)$ est engendré par Π et $HH_3(A)$ est engendré par Δ. Les $HH_i(A)$ ont les séries de Hilbert suivantes :

$$H(HH_0(A),t) = \frac{(1+t)^3}{1-t^3}$$

$$H(HH_1(A),t) = \frac{(1+t)^3}{1-t^3} - 1$$

$$H(HH_{2,3}(A),t) = \frac{t^3}{1-t^3}$$

B définit une surjection $HH_0(A) \longrightarrow HH_1(A)$ et un isomorphisme entre $HH_2(A)$ et $HH_3(A)$.

Corollaire 3.14 *(i) $H^0_{DR}(A) = k$*
$H^i_{DR}(A) = 0$ si $i \neq 0$.
(ii) $HC_0(A) = HH_0(A)$
$HC_2(A) = k \oplus HH_2(A)$
$HC_i(A) = 0$ si i est impair
$HC_i(A) = k$ si i est pair et ≥ 4 .
(iii) $S : HC_i(A) \longrightarrow HC_{i-2}(A)$ est donnée par l'identité sur k si $i \geq 6$ et par l'inclusion de k dans $k \oplus HH_2(A)$ si $i = 4$. Si $i = 2$, alors $S : k \oplus HH_2(A) \longrightarrow HH_0(A)$ est nul sur $HH_2(A)$ et est l'inclusion canonique $k \hookrightarrow HH_0(A)$ sur k.

Preuve. (i) D'après le théorème, on a le complexe :

$$0 \longrightarrow HH_0(A) \xrightarrow{surj} HH_1(A) \xrightarrow{B=0} HH_2(A) \xrightarrow{\sim} HH_3(A) \longrightarrow 0$$

Donc $H^0_{DR}(A) = ker(B)$, et $H^1_{DR}(A) = H^2_{DR}(A) = H^3_{DR}(A) = 0$. De plus, on sait que $H(HH_0(A),t) = \frac{(1+t^3)}{1-t^3} = H(HH_1(A),t) + 1$. D'où $dim_k(HH_0(A)_0) = dim_k(HH_1(A)_0) + 1$. Puisque $HH_0(A) \xrightarrow{B} HH_1(A)$ est surjective, on a $dim_k(ker(B)) = 1$, et donc $ker(B) = ker(B)_0$. On en déduit que $ker(B) = k$ et $H^0_{DR}(A) = k$.

(ii) On a le complexe double :

$$\begin{array}{ccccccc}
HH_3(A) & \xleftarrow{B} & HH_2(A) & \xleftarrow{B} & HH_1(A) & \xleftarrow{B} & HH_0(A) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
HH_2(A) & \xleftarrow{B} & HH_1(A) & \xleftarrow{B} & HH_0(A) & & \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \\
HH_1(A) & \xleftarrow{B} & HH_0(A) & & & & \\
\downarrow & & & & & & \\
HH_0(A) & & & & & &
\end{array}$$

D'où, en prenant l'homologie par rapport à B, le terme E^2 de la suite spectrale de Connes (voir [11]) qui converge vers $HC(A)$ est :

$$\begin{array}{ccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{k} \\
0 & 0 & 0 & \mathrm{k} & \\
HH_2(A) & 0 & \mathrm{k} & & \\
0 & \mathrm{k} & & & \\
HH_0(A) & & & &
\end{array}$$

Cette suite spectrale dégénère à l' ordre 2. On a donc $HC_2(A)^{\leq 0}/HC_2(A)^{\leq -1} = HH_2(A)$. D'où $HC_2(A)^{\leq 0} \simeq HH_2(A)$ et $HC_2(A)^{\leq 1} \simeq k \oplus HH_2(A)$, et $HC_2(A) \simeq k \oplus HH_2(A)$. De même, $HC_{2i+1}(A) = 0$ si $i \geq 0$, $HC_0(A) = HH_0(A)$ et $HC_{2i}(A) = k$ si $i \geq 2$.

(iii) On a la suite exacte longue de Connes :

$$\cdots \longrightarrow HH_n(A) \xrightarrow{I} HC_n(A) \xrightarrow{S} HC_{n-2}(A) \xrightarrow{B} HH_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

Cette suite est définie de la facon suivante : c'est la suite exacte longue associée à la suite exacte courte de complexes

$$0 \longrightarrow C(A)_{2n} \xrightarrow{i} C(A)_{2n} \oplus C(A)_{2n-2} \oplus \cdots \xrightarrow{s} C(A)_{2n-2} \oplus C(A)_{2n-4} \oplus \cdots \longrightarrow 0$$

s donne une application entre les deux bicomplexes $(C(A)_n, b, B)$ et $(C(A)_{n-2}, b, B)$, et donc en passant en homologie par rapport à b et B, une application S entre les termes E^2 suivants :

$$\begin{array}{ccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{k} \\
0 & 0 & 0 & \mathrm{k} & \\
HH_2(A) & 0 & \mathrm{k} & & \\
0 & \mathrm{k} & & & \\
HH_0(A) & & & &
\end{array}$$

(suite spectrale qui converge vers $HC_n(A)$)
et

$$\begin{array}{ccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{k} \\
0 & HH_2(A) & 0 & \mathrm{k} & \\
0 & 0 & \mathrm{k} & & \\
0 & HH_0(A) & & & \\
0 & & & &
\end{array}$$

(suite spectrale qui converge vers $HC_{n-2}(A)$)

S est l'identité si $i \geq 6$, car alors $HC_i(A) = HC_{i-2}(A) = k$ ou $= 0$ suivant la parité de i.

Pour $i = 4$, on a bien $k \hookrightarrow k \oplus HH_2(A)$.
Pour $i = 2$, $HH_2(A) \oplus k \longrightarrow HH_0(A)$, via $k \hookrightarrow HH_0(A)$ et $HH_2(A) \longrightarrow 0$.
$\blacksquare$

3.4 Preuve du théorème 3.13

En multipliant les relations par un scalaire, on peut écrire les f_i comme suit :

$$
\begin{aligned}
f_1 &= [x_2, x_3] - p(x_2x_3 + x_3x_2) - qx_1^2 &(3.14)\\
f_2 &= [x_3, x_1] - p(x_3x_1 + x_1x_3) - qx_2^2 &(3.15)\\
f_3 &= [x_1, x_2] - p(x_1x_2 + x_2x_1) - qx_3^2 &(3.16)
\end{aligned}
$$

p et q sont toujours algébriquements indépendants sur $\mathbf{Q}$. Pour prouver le théorème, nous nous placons sur le corps de base $k = k_0((h))$, et nous supposons que :

$$
\begin{aligned}
p &= p_1h + p_2h^2 + \dots &(3.17)\\
q &= q_1h + q_2h^2 + \dots &(3.18)
\end{aligned}
$$

Soit $\mathcal{A} = k_0[[h]] < x_1, x_2, x_3 > /(f_1, f_2, f_3)$. Alors $A_0 = \mathcal{A} \otimes_{k_0[[h]]} k_0 = k_0[x_1, x_2, x_3]$ et $A = \mathcal{A} \otimes_{k_0[[h]]} k_0((h))$. D'après l'article d'Artin et Schelter [2], on sait que ces deux k-algèbres graduées ont la même série de Hilbert, c'est à dire que pour tout n, $dim_{k_0}(A_{0,n}) = dim_k(A_n)$. On a le lemme suivant (cf [6]) :

Lemme 3.15 *Soit A un anneau local intègre, m son idéal maximal, K le corps des fractions de A, et M un A-module de type fini. Alors M est libre si $[(A/m) \otimes_A M : (A/m)] = [K \otimes_A M : K]$.*

Preuve. Notons p la valeur commune des deux dimensions. Soit $(1 \otimes y_i)_{i=1..p}$ une base du (A/m)-espace vectoriel $(A/m) \otimes_A M$. Alors, d'après le lemme de Nakayama, $(y_i)_{i=1..p}$ est un système de générateurs du A-module M. Donc les éléments $(1 \otimes y_i)_{i=1..p}$ engendrent le K-espace vectoriel $K \otimes_A M$. Comme cet espace est de dimension p sur K, les éléments $(1 \otimes y_i)_{i=1..p}$ forment une base de cet espace vectoriel. Donc les $(y_i)_{i=1..p}$ sont linéairement indépendants dans le A-module M, et ils forment donc une base de ce module. Donc M est un A-module libre. $\blacksquare$

Dans notre cas, $k_0[[h]]$ est un anneau local intègre d'idéal maximal (h), $\mathcal{A}_n$ est un $k_0[[h]]$-module de type fini, et on a :

$$[k_0 \otimes_{k_o[[h]]} \mathcal{A}_n : k_0] = [k_0((h)) \otimes_{k_0[[h]]} \mathcal{A}_n : k_0((h))]$$

Donc, d'après le lemme, $\mathcal{A}_n$ est un $k_0[[h]]$-module libre, et donc $\mathcal{A} = \oplus_{n\geq 0}\mathcal{A}_n$ est aussi un $k_0[[h]]$-module libre. En particulier, c'est un $k_0[[h]]$-module plat. Comme sur un anneau principal, un module est plat si et seulement si il est sans torsion, on voit donc que h n'est pas un diviseur de 0 dans $\mathcal{A}$.

On a une filtration par les puissances de h sur $\mathcal{A}$. En effet, les éléments de $\mathcal{A}$ sont certaines séries formelles $\sum_{n\geq 0} a_n h^n$. La filtration de $\mathcal{A}$ va alors être définie par $F_n(\mathcal{A}) = \{\sum_{i\geq n} a_i h^i\} = (h^n)$, où (h^n) est l'idéal (bilatère) de $\mathcal{A}$ engendré par h^n.
On a $gr_0(\mathcal{A}) = \mathcal{A}/(h) = A_0$. De plus, puisque h n'est pas diviseur de zéro, $h^n.\alpha \equiv 0(mod h^{n+1})$ équivaut à $\alpha \equiv 0(mod h)$. On voit donc que si on note encore h l'image de h dans $gr_1(\mathcal{A})$, tout élément de $gr_n(\mathcal{A})$ s'écrit de manière unique sous la forme $h^n.\alpha$, où $\alpha \in gr_0(\mathcal{A}) = A_0$. On a donc finalement $gr_F(\mathcal{A}) = A_0[h]$.

Cette filtration peut être étendue en une filtration F sur A pour laquelle $gr_F(A) = A_0[h, h^{-1}]$. F s'étend aussi en une filtration sur $C(A)$ pour laquelle $gr_F C(A) = C(A_0)[h, h^{-1}]$. On a un isomorphisme $H_*(gr_F(C(A)), b) \simeq HH_*(gr_F(A))$. Cette filtration définit alors une suite spectrale $E^1 = HH_*(gr_F A) \Rightarrow HH_*(A)$ (voir [8]). C'est cette suite spectrale qui va nous permettre de calculer $HH_*(A)$.

Définition 3.16 *Crochet de Poisson*
Soit A une algèbre commutative. Une application bilinéaire $\{\cdot,\cdot\}: A\times A \longrightarrow A$ est dite crochet de Poisson *si c'est une bidérivation et si elle vérifie l'identité de Jacobi :* $\{\{f,g\},h\} + \{\{g,h\},f\} + \{\{h,f\},g\} = 0$.

On peut voir le crochet $[\cdot,\cdot]$ de $\mathcal{A}$ comme une déformation d'un crochet de Poisson sur A_0, modulo la projection $p : \mathcal{A} \longrightarrow A_0$. De facon précise, le crochet $[\cdot,\cdot]$ est entièrement déterminé par les valeurs $[x_1, x_2]$, $[x_1, x_3]$ et $[x_2, x_3]$. Ces valeurs sont toutes des séries formelles en h sans termes constants à coefficients dans $\mathcal{A}$. On peut alors définir la bidérivation $\frac{1}{h}[a, b] : \mathcal{A}\times\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$. On a alors la proposition suivante :

Proposition 3.17 *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}\times\mathcal{A} & \stackrel{1/h[\cdot,\cdot]}{\longrightarrow} & \mathcal{A} \\ \downarrow p\times p & & \downarrow p \\ A_0\times A_0 & \stackrel{\{\cdot,\cdot\}}{\longrightarrow} & A_0 \end{array}$$

où:

$$\{x_2, x_3\} = 2p_1x_2x_3 + q_1x_1^2 = g_1 \quad (3.19)$$
$$\{x_3, x_1\} = 2p_1x_1x_3 + q_1x_2^2 = g_2 \quad (3.20)$$
$$\{x_1, x_2\} = 2p_1x_1x_2 + q_1x_3^2 = g_3 \quad (3.21)$$

$\{\cdot,\cdot\}$ est alors bien un crochet de Poisson.

$gr_F(A) = A_0[h, h^{-1}] \simeq A_0 \otimes k_0[h, h^{-1}]$ est une R-algèbre de polynômes sur l'anneau $R = k_0[h, h^{-1}]$. Par le théorème de Hochschild-Kostant-Rosenberg (cf [11] p.100 par exemple), on a $HH_*(R[x_1, x_2, x_3]) \simeq \Omega^*_{R[x_1,x_2,x_3]|_R}$. Ici, $\Omega_{R[x_1,x_2,x_3]|_R}$ désigne le R-module des formes différentielles de degré 1 de $R[x_1, x_2, x_3]$ sur R.
On sait de plus d'après une proposition due à Brylinski (voir [8]) que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{cccc}
E^1_n = & HH_n(gr_F(A)) & \xrightarrow{\sim} & \Omega^n_{gr_F(A)} \\
 & \downarrow d_1 & & \downarrow \partial \\
E^1_{n-1} = & HH_{n-1}(gr_F(A)) & \xrightarrow{\sim} & \Omega^{n-1}_{gr_F(A)}
\end{array}$$

où

$$\partial(r_0 dr_1 \wedge \ldots \wedge dr_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}\{r_0, r_i\} dr_1 \wedge \ldots \wedge \hat{dr_i} \wedge \ldots \wedge dr_n$$

$$+ \sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j} r_0 d\{r_i, r_j\} dr_1 \wedge \ldots \wedge \hat{dr_i} \wedge \ldots \wedge \hat{dr_j} \wedge \ldots \wedge dr_n$$

et l'isomorphisme entre $HH_n(gr_F(A))$ et $\Omega^n_{gr_F(A)}$ est donné par :

$$r_0 \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_n \mapsto \frac{1}{n!} r_0 dr_1 \wedge \ldots \wedge dr_n$$

De plus, $HH_*(R[x_1, x_2, x_3]) \simeq \Omega^*_{A_0[h,h^{-1}]|_{k_0[h,h^{-1}]}} \simeq \Omega^*_{A_0|_{k_0}} \otimes_{k_0} k_0[h, h^{-1}]$. Via cet isomorphisme, la différentielle sur $\Omega^*_{A_0|_{k_0}} \otimes_{k_0} k_0[h, h^{-1}]$ est $\partial \otimes h$.

La suite spectrale convergente $HH_*(gr_F(A)) \Rightarrow HH_*(A)$ devient alors la suite spectrale convergente :

$$\Omega^*_{A_0|_{k_0}} \otimes_{k_0} k_0[h, h^{-1}] \Rightarrow HH_*(A) \tag{3.22}$$

Le calcul de $HH_*(A)$ va maintenant se faire à partir de cette suite spectrale. Explicitons le premier terme de cette suite spectrale, sachant que (cf [13], attention ici la graduation est décroissante) :

$$E^1_{p,q} = H_{p+q}(F_{-p}C(A)/F_{-p+1}C(A))$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
\cdots & \Omega^2_{A_0}\otimes h^{-2} & \Omega^3_{A_0}\otimes h^{-2} & 0 & 0 & \cdots & \text{ligne } 2 \\
 & \downarrow {\scriptstyle \partial\otimes h} & \downarrow {\scriptstyle \partial\otimes h} & & & & \\
\cdots & \Omega^1_{A_0}\otimes h^{-1} & \Omega^2_{A_0}\otimes h^{-1} & \Omega^3_{A_0}\otimes h^{-1} & 0 & \cdots & \text{ligne } 1 \\
 & \downarrow {\scriptstyle \partial\otimes h} & \downarrow {\scriptstyle \partial\otimes h} & \downarrow {\scriptstyle \partial\otimes h} & & & \\
\cdots & A_0\otimes 1 & \Omega^1_{A_0}\otimes 1 & \Omega^2_{A_0}\otimes 1 & \Omega^3_{A_0}\otimes 1 & \cdots & \text{ligne } 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & &
\end{array}$$

La multiplication par l'élément C_3 défini précédemment définit un morphisme de $C(A)$ dans $C(A)$ qui préserve la filtration, et donc une application sur $\Omega_{A_0|k_0}\otimes_{k_0} k_0[h,h^{-1}]$. Soit $\Phi=-\frac{1}{3h}C_3$. La multiplication par Φ correspond sur $\Omega_{A_0|k_0}\otimes_{k_0} k_0[h,h^{-1}]$ à la multiplication par le terme de plus bas degré ϕ de Φ (dans le gradué associé, seul le terme de plus bas degré va compter). On trouve que

$$\phi=\frac{q_1}{3}(x_1^3+x_2^3+x_3^3)+2p_1x_1x_2x_3$$

Comme Φ est central, on sait alors que $\{x_i,\phi\}=0$ pour $i=1,2,3$. On en déduit facilement que ∂ est ϕ-linéaire. On en déduit donc que les $H(\Omega^*_{A_0},\partial)$ sont des $k_0[\phi]$-modules. Ce sont même des k_0-modules gradués et des $k_0[\phi]$-modules gradués puisque ∂ préserve la graduation de $\Omega^*_{A_0}$.
D'après l'article de Brylinski ([8]), on sait aussi que l'application $B: C(A)\longrightarrow C(A)$ correspond à la différentielle d sur $\Omega^*_{A_0}$. Enfin, notons π et δ les images dans $\Omega_{A_0|k_0}\otimes_{k_0} k_0[h,h^{-1}]$ de $q(\Pi)$ et $q(\Delta)$. On a, en appliquant l'isomorphisme ci-dessus:

$$\pi=x_1dx_2\wedge dx_3+x_2dx_3\wedge dx_1+x_3dx_1\wedge dx_2$$

$$\delta=dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3$$

Remarque 3.17 Comme $H_i(\Omega^*_{A_0}\otimes h^m,\partial\otimes h)=H_i(\Omega^*_{A_0},\partial)\otimes h^m$, pour avoir le deuxième terme E^2 de la suite spectrale, il suffit de connaitre $H_i(\Omega^*_{A_0},\partial)$.

Le théorème 3.13 va provenir du théorème suivant et du fait que la suite spectrale précédente dégénère à l'ordre 2.

Théorème 3.18 *$(H_i(\Omega^*_{A_0},\partial))_i$ sont des $k_0[\phi]$-modules libres de rangs 8,8,1,1. $H_2(\Omega^*_{A_0},\partial)$ est engendré par π et $H_3(\Omega^*_{A_0},\partial)$ est engendré par δ. On a les séries de Hilbert suivantes:*

$$H(H_0(\Omega^*_{A_0},\partial),t)=\frac{(1+t)^3}{1-t^3}$$

$$H(H_1(\Omega^*_{A_0},\partial),t)=\frac{(1+t)^3}{1-t^3}-1$$

et on a bien sûr:

$$H(H_{2,3}(\Omega^*_{A_0},\partial),t)=\frac{t^3}{1-t^3}$$

d définit des surjections $H_0(\Omega^*_{A_0},\partial)\longrightarrow H_1(\Omega^*_{A_0},\partial)$ *et* $H_2(\Omega^*_{A_0},\partial)\longrightarrow H_3(\Omega^*_{A_0},\partial)$.

Preuve. Nous allons utiliser les techniques du calcul vectoriel. On notera $\bar{u}$ le vecteur (u_1,u_2,u_3), $\times$ le produit vectoriel et . le produit scalaire. On a la propriété remarquable suivante : $\nabla\phi=(g_1,g_2,g_3)=\bar{g}$, et donc $\nabla\times\bar{g}=\nabla\times\nabla\phi=0$.

Première étape. Nous allons calculer explicitement ∂_1, ∂_2 et ∂_3 . Montrons que :

$$\partial_1(X_1dx_1+X_2dx_2+X_3dx_3)=(\nabla\times\bar{X}).\nabla\phi$$

$\partial_1(X_1dx_1)=\{X_1,x_1\}$. Soit $X_1=x_1^kx_2^lx_3^p$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\{x_1^kx_2^lx_3^p,x_1\} &= x_1^k\{x_2^lx_3^p,x_1\}+x_2^lx_3^p\{x_1^k,x_1\}\\
&= x_1^k\{x_2^lx_3^p,x_1\}\\
&= x_1^k[x_3^p\{x_2^l,x_1\}+x_2^l\{x_3^p,x_1\}]\\
&= x_1^k[x_3^p.(-\frac{\partial(x_2^l)}{\partial x_2}g_3)+x_2^l.(\frac{\partial(x_3^p)}{\partial x_3}g_2)] \quad (*)\\
&= -\frac{\partial(x_1^kx_2^lx_3^p)}{\partial x_2}g_3+\frac{\partial(x_1^kx_2^lx_3^p)}{\partial x_3}g_2\\
&= -\frac{\partial X_1}{x_2}g_3+\frac{\partial X_1}{x_3}g_2\\
&= (\nabla\times(X_1,0,0)).(g_1,g_2,g_3)
\end{aligned}$$

On vérifie de même ce résultat pour $(0,X_2,0)$ et $(0,0,X_3)$, et on conclut par linéarité. Il reste à prouver le résultat $(*)$:

$$\begin{aligned}
K_l=\{x_2^l,x_1\} &= x_2.\{x_2^{l-1},x_1\}+x_2^{l-1}.\{x_2,x_1\}\\
&= x_2.K_{l-1}-x_2^{l-1}.g_3\\
&= \cdots\\
&= -lx_2^{l-1}g_3\\
&= -\frac{\partial(x_2^l)}{\partial x_2}g_3
\end{aligned}$$

Des calculs du même type que celui mené ci-dessus nous donnent les deux autres résultats :

$$\partial_2(X_1dx_2\wedge dx_3+X_2dx_3\wedge dx_1+X_3dx_1\wedge dx_2)=(\nabla.\bar{X})d\phi-d(\bar{X}.\nabla\phi)$$

$$\partial_3(U dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3) = -dU \wedge d\phi$$

Deuxième étape. Calculons maintenant $\{ker(\partial_i\}_{i=1,2,3}$.

Calcul de $Ker(\partial_1)$:
Supposons que $(\nabla \times \bar{X}).\nabla\phi = 0$. Posons $\bar{X}^0 = \bar{X}$. Nous allons montrer qu'il existe $\bar{X}^1 \in A_0^3$ tel que $\nabla \times \bar{X}^0 = \bar{X}^1 \times \bar{g}$.

Définition 3.19 *Soit R un anneau commutatif. Une suite $(x_1, ..., x_n)$ d'éléments de R est dite suite régulière si elle vérifie les propriétés suivantes :*
(i) x_1 est intègre dans R.
(ii) pour $i = 2, \ldots, n$, x_i est intègre dans $R/(x_1, \ldots, x_{i-1})$.

On peut définir alors un complexe de Koszul (mais dans le cas commutatif cette fois), à l'aide des suites régulières (voir Weibel [13] par exemple). On déduit alors de cette théorie que si $(x_1, ..., x_n)$ est une suite régulière de R, on a la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow \Lambda^n(R^n) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Lambda^2(R^n) \longrightarrow R^n \xrightarrow{.x} R \longrightarrow R/I \longrightarrow 0$$

où $I = (x_1, \ldots, x_n)$. Les différentielles sont :

$$e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p} \mapsto \sum_k (-1)^{k+1} x_{i_k}.e_{i_1} \wedge \ldots \wedge \hat{e_{i_k}} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}$$

Lemme 3.20 *La suite (g_1, g_2, g_3) est régulière.*

Preuve. L'anneau $A_0 = k_0[x_1, x_2, x_3]$ est intègre, donc g_1 est régulier dans cet anneau. On montre que $A_0/(g_1)$ est intègre, et donc g_2 est régulier dans $A_0/(g_1)$. Il est plus difficile de montrer que g_3 est régulier dans $A_0/(g_1, g_2)$; nous allons donner une idée de la démonstration. On montre tout d'abord que x_3 est régulier dans $A_0/(g_1, g_2)$, pour pouvoir ensuite localiser ce dernier anneau par x_3. Puis on montre que dans ce localisé, g_3 n'est pas diviseur de 0, et donc g_3 n'est pas diviseur de zéro dans $A_0/(g_1, g_2)$. ■

On a donc la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \Lambda^3(A_0^3) \xrightarrow{d_3} \Lambda^2(A_0^3) \xrightarrow{d_2} A_0^3 \xrightarrow{d_1=(g_1,g_2,g_3)} A_0 \longrightarrow A_0/(g_1, g_2, g_3) \longrightarrow 0$$

$(\nabla \times \bar{X}).\nabla\phi = 0$ donc $\nabla \times \bar{X} \in ker(d_1) = im(d_2)$. Or, si $Y \in \Lambda^2(A_0^3)$ et $Y = y_3.e_1 \wedge e_2 + y_2.e_3 \wedge e_1 + y_1.e_2 \wedge e_3$ où (e_1, e_2, e_3) est une base du A_0-module libre A_0^3, on a $d_2(Y) = (y_1, y_2, y_3) \times (g_1, g_2, g_3)$ dans la base (e_1, e_2, e_3). Donc il existe bien un $\bar{X}^1$ vérifiant la propriété souhaitée.
Alors $\nabla.(\bar{X}^1 \times \bar{g}) = 0$. Comme $\nabla \times \bar{g} = 0$, on a $(\nabla \times \bar{X}^1).\bar{g} = 0$. En réitérant cette procédure, on obtient une suite de vecteurs $\bar{X}^i$ vérifiant $\nabla \times \bar{X}^i = \bar{X}^{i+1} \times \bar{g}$.

Puisqu'à chaque pas, le degré de $\bar{X}^i$ s'abaisse, il existe un m tel que $\nabla\times\bar{X}^m = 0$. Le lemme de Poincaré nous dit alors qu'il existe ψ_m tel que $\bar{X}^m = \nabla\psi_m$. Comme $\nabla\psi_m \times \bar{g} = \nabla\times(\psi_m\bar{g})$, on a $\nabla\times(\bar{X}^{m-1} - \psi_m\bar{g}) = 0$. En appliquant de nouveau le lemme de Poincaré, il existe $\psi_{m-1} \in A_0$ tel que $\bar{X}^{m-1} = \nabla\psi_{m-1} + \psi_m\bar{g}$. En continuant ainsi, on obtient une suite d'élements (ψ_i) vérifiant $\bar{X}^i = \nabla\psi_i + \psi_{i+1}\bar{g}$. D'où l' existence de ψ et θ tels que $\bar{X} = \nabla\psi + \theta\bar{g}$, ce qui signifie : $X_1dx_1 + X_2dx_2 + X_3dx_3 = d\psi + \theta d\phi$, et donc :

$$Ker(\partial_1) = \{d\psi + \theta d\phi; \psi, \theta \in A_0\}$$

Calcul de $Ker(\partial_2)$:

Lemme 3.21 *Si* $U \in A_0$ *vérifie* $dU \wedge d\phi = 0$ *alors* $U = f(\phi)$, $f \in k_0[\phi]$.

Preuve. Soit $U^0 = U$. Comme $dU\wedge d\phi = 0$, ∇U^O et $\bar{g}$ sont colinéaires. Alors, comme g_1, g_2, g_3 n'ont pas de facteurs communs, il existe U^1 tel que $\nabla U^0 = U^1(g_1, g_2, g_3)$, soit $dU^0 = U^1 d\phi$. Donc $dU^1 \wedge d\phi = d^2U^0 = 0$. En réitérant le processus, on obtient une suite finie de polynômes U^i, de degré de plus en plus petit. Cette suite s'achève en un U^m tel que $dU^m = 0$ et donc $U^m = \lambda_m$, $\lambda_m \in k_0$. Alors $U^{m-1} = \lambda_m\phi + \lambda_{m-1}$, $U^{m-2} = 1/2\lambda_m\phi^2 + \lambda_{m-1}\phi + \lambda_{m-2}$,... Et donc $U^0 = f(\phi)$, où $f \in k_0[\phi]$. ■

Supposons maintenant que $(\nabla.\bar{X})d\phi - d(\bar{X}.\nabla\phi) = 0$. Alors $d(\nabla.\bar{X})\wedge d\phi = 0$, et donc d'après le lemme :

$$\nabla.\bar{X} = u'(\phi)$$

d'où :

$$\bar{X}.\nabla\phi = u(\phi)$$

où $u(\phi) \in \phi k_0[\phi]$. Nous allons résoudre ce système d'équations. Une solution particulière de ce système est $\bar{X}^p = \frac{u(\phi)}{3\phi}\bar{x}$. Si on pose $\bar{X}^h = \bar{X} - \bar{X}^p$ alors $\bar{X}^h$ est solution du système homogène :

$$\nabla.\bar{X} = 0$$

$$\bar{X}.\nabla\phi = 0$$

Alors on sait qu'il existe $\bar{Y}$ tel que $\bar{X}^h = \nabla\times\bar{Y}$, et $(\nabla\times\bar{Y}).\nabla\phi = 0$. Nous avons résolu ce type d'équation dans le calcul de $ker(\partial_1)$. On sait que $\bar{Y} = \theta\nabla\phi + \nabla\psi$. Donc $\bar{X}^h = \nabla\theta\times\nabla\phi$. Posons $f(\phi) = \frac{u(\phi)}{3\phi}$. On a $\bar{X} = \nabla\theta\times\nabla\phi + f(\phi)\bar{x}$, et donc :

$$Ker(\partial_2) = \{f(\phi)\pi + d\theta\wedge d\phi; f \in k_0[\phi], \theta \in A_0\}$$

Calcul de $Ker(\partial_3)$:
Si $dU \wedge d\phi = 0$, on a vu précédemment que $U = f(\phi)$ où $f \in k_0[\phi]$. D'où :

$$Ker(\partial_3) = \{f(\phi)\delta; f \in k_0[\phi]\}$$

Troisième étape. Afin de calculer les séries de Hilbert de $ker(\partial_1)$ et $ker(\partial_2)$, nous introduisons les suites exactes suivantes :

$$0 \longrightarrow k_0[\phi] \xrightarrow{\alpha} A_0 \oplus A_0(-3) \xrightarrow{\beta} ker(\partial_1) \longrightarrow 0 \tag{3.23}$$

où $\alpha(u(\phi)) = (u(\phi), -u'(\phi))$ et $\beta(\psi, \theta) = d\psi + \theta d\phi$. Cette suite est exacte, car $d\psi + \theta d\phi = 0 \Rightarrow d\theta \wedge d\phi = 0$, et donc $\theta = f(\phi)$. Le décalage dans la graduation provient du fait que ϕ est de degré 3.

$$0 \longrightarrow k_0[\phi](-3) \xrightarrow{\gamma} k_0[\phi](-3) \oplus A_0(-3) \xrightarrow{\epsilon} ker(\partial_2) \longrightarrow 0 \tag{3.24}$$

où $\epsilon(f(\phi), \theta) = f(\phi)\pi + d\theta \wedge d\phi$ et $\gamma(g(\phi)) = (0, g(\phi))$. Cette suite est exacte, car

$$\begin{aligned} \epsilon(f(\phi), \theta) = 0 &\Rightarrow d(f(\phi)\pi) = 0 \\ &\Rightarrow d(f(\phi)) \wedge \pi + f(\phi) d\pi = 0 \\ &\Rightarrow f'(\phi) d\phi \wedge \pi + f(\phi).3\delta = 0 \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} d\phi \wedge \pi &= (g_1 dx_1 + g_2 dx_2 + g_3 dx_3) \wedge (x_1 dx_2 \wedge dx_3 + x_2 dx_3 \wedge dx_1 + x_3 dx_1 \wedge dx_2) \\ &= (g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3)\delta \\ &= 3\phi\delta \end{aligned}$$

où la dernière égalité provient de la relation d'Euler pour les polynômes homogènes. D'où : $d(f(\phi)\psi) = 3(f(\phi) + f'(\phi)\phi).\delta$, ce qui est non nul si $f \neq 0$. Donc $f = 0$, et $d\theta \wedge d\phi = 0$ implique $\theta = g(\phi)$.

Quatrième étape. Nous allons maintenant calculer les séries de Hilbert des différents groupes d'homologie. On a les suites exactes évidentes suivantes :

$$0 \longrightarrow ker(\partial_{i+1}) \longrightarrow \Omega^{i+1}_{A_0} \longrightarrow ker(\partial_i) \longrightarrow H_i(\Omega^*_{A_0}, \partial) \longrightarrow 0 \tag{3.25}$$

On a les séries de Hilbert suivantes : $H(k_0[\phi], t) = \frac{1}{1-t^3}$, $H(A_0, t) = \frac{1}{(1-t)^3}$, $H(A_0(-3), t) = \frac{t^3}{(1-t)^3}$.
On a d'après 3.23 : $H(ker(\partial_1, t)) = H(A_0, t) - H(k_0[\phi], t) + H(A_0(-3), t)$, d'où :

$$H(ker(\partial_1), t) = \frac{1+t^3}{(1-t)^3} - \frac{1}{1-t^3} \tag{3.26}$$

De même, d'après 3.24 :

$$H(ker(\partial_2), t) = \frac{t^3}{(1-t)^3} \tag{3.27}$$

Il est facile de voir que $H(ker(\partial_3), t) = \frac{t^3}{1-t^3}$.

D'après la suite 3.25 à l'ordre $i = 1$, sachant que $H(\Omega^2_{A_0}, t) = \frac{3t^2}{(1-t)^3}$, on a

$$\begin{aligned} H(H_1(\Omega^*_{A_0}, \partial), t) &= \frac{2t^3 - 3t^2 + 1}{(1-t)^3} - \frac{t^3}{1-t^3} - 1 \\ &= \frac{(1+t)^3}{1-t^3} - 1 \end{aligned}$$

D'après la suite 3.25 à l'ordre $i = 2$, sachant que $H(\Omega^3_{A_0}, t) = \frac{t^3}{(1-t)^3}$, on a

$$H(H_2(\Omega^*_{A_0}, \partial), t) = \frac{t^3}{1-t^3} \tag{3.28}$$

$H_3(\Omega^*_{A_0}, \partial) = ker(\partial_3)$, donc :

$$H(H_3(\Omega^*_{A_0}, \partial), t) = \frac{t^3}{1-t^3} \tag{3.29}$$

Enfin, d'après la suite 3.25 à l'ordre $i = 0$, sachant que $H(\Omega^1_{A_0}, t) = \frac{3t}{(1-t)^3}$, on a :

$$H(H_0(\Omega^*_{A_0}, \partial), t) = \frac{(1+t)^3}{1-t^3} \tag{3.30}$$

Cinquième étape. On sait, d'après la description des ∂_i et de leurs noyaux, que $H_1(\Omega^*_{A_0}, \partial)$ est formé des éléments $d\psi$, où $\psi \in A_0$, que $H_2(\Omega^*_{A_0}, \partial)$ est engendré par π en tant que $k_0[\phi]$-module, et que $H_3(\Omega^*_{A_0}, \partial)$ est engendré par δ en tant que $k_0[\phi]$-module. Or les séries de Hilbert de $H_2(\Omega^*_{A_0}, \partial)$ et de $H_3(\Omega^*_{A_0}, \partial)$ coincident avec celle de $k_0[\phi]$ (décalée de la graduation de π et de δ respectivement), donc $H_2(\Omega^*_{A_0}, \partial)$ et $H_3(\Omega^*_{A_0}, \partial)$ sont des $k_0[\phi]$-modules libres de rang 1. De plus, d est surjective de $H_0(\Omega^*_{A_0}, \partial)$ dans $H_1(\Omega^*_{A_0}, \partial)$, puisque ce dernier est formé d'éléments $d\psi$. Enfin, comme $d(f(\phi)\pi) = 3(f(\phi) + f'(\phi))\delta$ et que $f \mapsto f + \phi f'$ est une surjection de $k_0[\phi]$ sur lui-même, d est bien une surjection de $H_2(\Omega^*_{A_0}, \partial)$ sur $H_3(\Omega^*_{A_0}, \partial)$.

Sixième étape. Il nous reste à montrer que $H_0(\Omega^*_{A_0}, \partial)$ et $H_1(\Omega^*_{A_0}, \partial)$ sont des $k_0[\phi]$-modules libres. Il suffit de montrer que la multiplication par ϕ est injective.

En effet, en utilisant la graduation de $H_{0,1}(\Omega^*_{A_0}, \partial)$, on sait alors que ces $k_0[\phi]$-modules sont sans torsion. De plus, comme $k_0[\phi]$ est un anneau principal intègre, dire que ces modules sont sans torsion implique que ces modules sont plats (cf [9] p.163). On a le résultat suivant dans la catégorie graduée :

Proposition 3.22 *(voir [12]) Si M est un A-module gradué borné inférieurement, M est libre (gradué) si et seulement si M est plat.*

Preuve. Soit V un sous k-espace vectoriel gradué de M tel que $M = V \oplus mM$, où $m = A_1 + A_2 + \cdots$. Alors $k \otimes_A (M/AV) = 0$, et donc par le lemme de Nakayama gradué, $M/AV = 0$, soit $M = AV$. On a donc une surjection de degré 0 $\psi : A \otimes_k V \longrightarrow M$, définie par $\psi(x \otimes v) = xv$. Comme M est plat, $Tor^1_A(k, M) = 0$. Donc $ker(k \otimes_A ker(\psi) \longrightarrow k \otimes_A (A \otimes_k V)) = 0$ et on a donc une suite exacte :

$$0 \longrightarrow k \otimes_A ker(\psi) \longrightarrow k \otimes_A (A \otimes_k V) \xrightarrow{1\otimes\psi} k \otimes_A M \longrightarrow 0$$

En identifiant les deux derniers termes de ce complexe avec V, $1 \otimes \psi$ s'identifie à l'application identité. Donc $k \otimes_A ker(\psi) = 0$. Comme $ker(\psi)$ est borné inférieurement, par le lemme de Nakayama gradué, $ker(\psi) = 0$. Donc M est isomorphe à $A \otimes_k V$ et M est libre. ■

Il est évident que les $H_{0,1}(\Omega^*_{A_0}, \partial)$ sont bornés inférieurement, donc il suffit bien de montrer que la multiplication par ϕ est injective.

$H_0(\Omega^*_{A_0}, \partial)$:
$im(\partial_1) = \{\bar{u}.\bar{g}; \bar{u} \in A_0^3, \nabla.\bar{u} = 0\}$
Soit $p = \bar{v}.\bar{g}$. L'élément p est dans $im(\partial_1)$ si et seulement si il existe $\bar{r}$ tel que $\nabla.(\bar{v} - \bar{r} \times \bar{g}) = 0$, si et seulement si $\nabla.\bar{v} \in im(\partial_1)$. En effet, soit $\bar{w}$ tel que $\nabla.\bar{w} = 0$ et $\bar{v}.\bar{g} = \bar{w}.\bar{g}$. Alors $(\bar{v}-\bar{w}).\bar{g} = 0$, donc il existe $\bar{r}$ tel que $\bar{v}-\bar{w} = \bar{r}\times\bar{g}$. Ce $\bar{r}$ convient. De plus, $\nabla(\bar{r} \times \bar{g}) = (\nabla \times \bar{r}).\nabla\phi = \partial_1(\bar{r})$, et donc $\nabla.\bar{v} \in im(\partial_1)$. Les réciproques se prouvent sans difficulté.

Si $\phi\psi \in im(\partial_1)$, on a $\phi = \frac{1}{3}\bar{x}.\bar{g}$ par l'identité d'Euler. Alors $\phi\psi = \frac{1}{3}(\psi\bar{x}).\bar{g}$, et d'après ce qui précède, $\nabla.(\psi\bar{x}) \in im(\partial_1)$. Or $\nabla.(\psi\bar{x}) = (3+deg(\psi)).\psi$, donc $\psi \in im(\partial_1)$. On a donc bien $\phi\psi = 0 \Rightarrow \psi = 0$ dans $H_0(\Omega^*_{A_0}, \partial)$.

$H_1(\Omega^*_{A_0}, \partial)$:
Supposons qu'il existe $d\theta$ tel que $\phi d\theta \in im(\partial_2)$. Alors il existe $\bar{X} \in A_0^3$ tel que :

$$d(\phi\theta) - \theta d\phi = \phi d\theta = (\nabla.\bar{X})d\phi - d(\bar{X}.\nabla\phi) \Rightarrow d(\nabla.\bar{X} - \theta) \wedge d\phi = 0$$

Donc il existe $u(\phi) \in \phi k_0[\phi]$ tel que :

$$\nabla.\bar{X} = \theta + u'(\phi) \quad (3.31)$$
$$\bar{X}.\nabla\phi = \theta\phi + u(\phi) \quad (3.32)$$

La seconde équation vient de :

$$\begin{aligned} d(\bar{X}.\nabla\phi) &= (\nabla.\bar{X})d\phi + \theta d\phi - d(\phi\theta) \\ &= (\theta + u'(\phi))d\phi - \phi d\theta \\ \Rightarrow \bar{X}.\nabla\phi &= u(\phi) + \phi\theta \end{aligned}$$

Quitte à modifier $\bar{X}$ comme on l'a fait au 2., on peut supposer que $u = 0$. D'après l'équation 3.32, on a $\nabla\phi.(\bar{X} - \frac{1}{3}\theta\bar{x}) = 0$, en utilisant une nouvelle fois la relation d'Euler. Donc il existe $\bar{r} \in A_0^3$ tel que $\bar{X} = \frac{1}{3}\theta\bar{x} + \bar{r} \times \nabla\phi$. D'où en remplacant dans 3.31 :

$$\nabla.(\frac{1}{3}\theta\bar{x}) - \theta + \nabla.(\bar{r} \times \nabla\phi) = 0$$

d'où $\theta = -\frac{3}{deg\theta}(\nabla \times \bar{r}).\nabla\phi$. Si on pose $\bar{Y} = \frac{3}{deg\theta}(\nabla \times \bar{r})$ alors $d\theta = (\nabla.\bar{Y})d\phi - d(\bar{Y}.\nabla\phi)$, et donc $d\theta \in im(\partial_2)$.Donc $\phi d\theta = 0 \Rightarrow d\theta = 0$ dans $H_1(\Omega^*_{A_0}, \partial)$.

Septième étape. D'après la série de Hilbert de $H_0(\Omega^*_{A_0}, \partial)$: $\frac{(1+t)^3}{1-t^3} = \frac{1+3t+3t^2+t^3}{1-t^3}$, ce $k_0[\phi]$-module libre est de rang 8. On ne sait pas donner de générateurs explicites, mais on sait qu'il y a un générateur de degré 0, 3 générateurs de degré 1, 3 générateurs de degré 2 et un générateur de degré 3.
De même, comme $H(H_1(\Omega^*_{A_0}, \partial), t) = \frac{(1+t)^3}{1-t^3} - 1 = \frac{3t+3t^2+2t^3}{1-t^3}$, $H_1(\Omega^*_{A_0}, \partial)$ est de rang 8, il a 3 générateurs de degré 1, 3 générateurs de degré 2, et 2 générateurs de degré 3. ∎

Nous allons énoncer et démontrer un critère de dégénérescence de suites spectrales. Pour cela, nous allons commencer par décrire les suites spectrales en question (cf [13] et bien sûr [1]).
Soit C un complexe et F une filtration croissante sur C :

$$\cdots \subset F_{p-1}C \subset F_pC \subset F_{p+1}C \subset \cdots$$

Notons $\beta_p : F_pC \longrightarrow F_pC/F_{p-1}C$.
On a une application canonique $F_pC^\cdot/F_{p-r}C^\cdot \longrightarrow (GrC^\cdot)_p$, on peut donc bien définir $Z_p^r = im(H^*(F_pC^\cdot/F_{p-r}C^\cdot) \longrightarrow H^*((GrC^\cdot)_p))$.
On a une application $x_0 \in \{x \in F_{p+r-1}C^i; d(x) \in F_pC^{i+1}\} \mapsto d(x_0) \in F_pC^{i+1}$.
Une telle application nous permet alors de définir $B_p^r = im(H^*(F_{p+r-1}C^\cdot/F_pC^\cdot) \longrightarrow H^*((GrC^\cdot)_p))$.
On définit de même $Z_p^\infty = im(H^*(F_pC^\cdot) \longrightarrow H^*((GrC^\cdot)_p))$ et $B_p^\infty = im(H^*(C^\cdot/F_pC^\cdot) \longrightarrow H^*((GrC^\cdot)_p))$. On a les inclusions :

$$\cdots \subset B_p^r \subset B_p^{r+1} \subset \cdots \subset B_p^\infty \subset Z_p^\infty \subset \cdots \subset Z_p^{r+1} \subset Z_p^r \subset \cdots$$

et des isomorphismes : $Z_p^r/Z_p^{r+1} \simeq B_{p-r}^{r+1}/B_{p-r}^r$, et $B_p^\infty = \bigcup_r B_p^r$.
Soit $E_p^r = Z_p^r/B_p^r$. C'est un complexe via la différentielle $d_p^r : E_p^r \longrightarrow E_{p-r}^r$ induite par d. Alors cette suite spectrale vérifie :

$$E^1 : H^*(GrC^\cdot) \Rightarrow H^*(C^\cdot) \tag{3.33}$$

Soit

$$\Phi_p^r : H^*(F_pC^\cdot) \longrightarrow H^*(F_pC^\cdot/F_{p-r}C^\cdot) \longrightarrow Z_p^r \longrightarrow E_p^r$$

On a alors le critère suivant :

Proposition 3.23 *Si pour un r donné, Φ_p^r est surjective pour tout p, alors la suite spectrale 3.33 dégénère en E^r. On a une propriété analogue pour une filtration décroissante.*

Preuve. L'image de Φ_p^r dans Z_p^r est égale à Z_p^∞. Comme Φ_p^r est surjective, on a $Z_p^\infty/B_p^r = Z_p^r/B_p^r$, d'où $Z_p^r = Z_p^\infty$. On en déduit donc que $Z_p^r = Z_p^{r+1} = \cdots = Z_p^\infty$. Puis, à l'aide des isomorphismes ci-dessus, $B_p^r = B_p^{r+1} = \cdots = B_p^\infty$, et donc $E^r = E^{r+1} = \cdots = E^\infty$. ∎

Nous allons utiliser cette proposition pour montrer que notre suite spectrale 3.22 dégénère à l'ordre 2.
Le terme E^2 est le suivant :

$$\begin{array}{lllllll}
H_0(\Omega^*_{A_0},\partial)\otimes h^{-3} & & & & & & \\
H_1(\Omega^*_{A_0},\partial)\otimes h^{-2} & \xleftarrow{d} & H_0(\Omega^*_{A_0},\partial)\otimes h^{-2} & & & & \\
H_2(\Omega^*_{A_0},\partial)\otimes h^{-1} & \xleftarrow{d} & H_1(\Omega^*_{A_0},\partial)\otimes h^{-1} & \xleftarrow{d} & H_0(\Omega^*_{A_0},\partial)\otimes h^{-1} & & \\
H_3(\Omega^*_{A_0},\partial) & \xleftarrow{d} & H_2(\Omega^*_{A_0},\partial) & \xleftarrow{d} & H_1(\Omega^*_{A_0},\partial) & \xleftarrow{d} & H_0(\Omega^*_{A_0},\partial)
\end{array}$$

Il suffit de montrer que tout élément de E_0^2 se relève en un élément de $H_*(F_0(C(A)))$, on en déduira que tout élément de E_p^2 se relève en un élément de $H_*(F_{-p}(C(A)))$ pour tout p. En effet, les différentes lignes de E^2 sont les mêmes à une puissance de h près.

$H_0(\Omega^*_{A_0},\partial)$ est un quotient de A_0. Or les éléments de A_0 sont de degré 0, donc les éléments de $H_0(\Omega^*_{A_0},\partial)$ proviennent bien des éléments de $H_*(F_0(C(A)))$.
Soit $u \in H_1(\Omega^*_{A_0},\partial)$. On a $u = d\psi$, où $\psi \in A_0$. On peut voir ψ comme un élément Ψ de $F_0(A)$, et on peut considérer son image dans $H_0(F_0(C(A)))$. Alors $U = B\Psi \in H_1(F_0(C(A)))$, et c'est un relevé de u .
Si $u \in H_2(\Omega^*_{A_0},\partial)$, on sait que $u = f(\phi)\pi$ où $f \in k_0[\phi]$. Alors $U = f(\Phi)\Pi$ est

un relevé de u.
Si $u \in H_3(\Omega^*_{A_0}, \partial)$, on sait que $u = f(\phi)\delta$ où $f \in k_0[\phi]$. Alors $U = f(\Phi)\Delta$ est un relevé de u.

La suite spectrale dégénère donc à l'ordre 2. Comme de plus, la filtration sur $C(A)$ est complète, on sait que la suite spectrale converge vers $HH_*(A)$ (voir [13]). On a donc $gr_F HH_i(A) \simeq H_i(\Omega^*_{A_0}, \partial) \otimes k_0[h, h^{-1}]$ pour $i = 0, 1, 2, 3$. On en déduit ensuite que pour tous p, q tels que $q \geq p$,
$F_p HH_i(A)/F_q HH_i(A) \simeq H_i(\Omega^*_{A_0}, \partial) \otimes \{k_0 h^p + \cdots + k_0 h^q\}$. Puis, en prenant la limite inverse par rapport à q, $F_p HH_i(A) \simeq H_i(\Omega^*_{A_0}, \partial) \otimes \{\sum_{i=p}^{\infty}, a_n h^n a_n \in k_0\}$.

On en déduit enfin que $HH_i(A) \simeq H_i(\Omega^*_{A_0}, \partial) \otimes k_0((h))$. Via cet isomorphisme, $\Pi f(\Phi)$ s'envoie sur $\pi f(\phi) \otimes 1$ si $f \in k_0[\Phi]$ (d'après le relèvement effectué précédemment), etc... Le théorème est alors prouvé.

Références

[1] M. Van den Bergh, Non-commutative homology of some three-dimensional quantum spaces, *K-Theory* **8** (1994), 213-220.

[2] M. Artin, W. Schelter, Graded algebras of global dimension 3, *Adv. in Math.* **66** (1987), 171-216.

[3] A. A. Beilinson, V. Ginzburg, W. Soergel, Koszul duality patterns in representation theory, *J. Am. Math. Soc.* **9** (1996), 473-527.

[4] D.-J. Benson, "Representations and cohomology", vol 1 et 2, Cambridge University Press, 1991.

[5] R. Berger, Koszulity for nonquadratic algebras, *Journal of Algebra* **239** (2001), 705-734 .

[6] N. Bourbaki, "Algèbre commutative, chapitres 1 et 2", Hermann, 1961.

[7] N. Bourbaki, "Algèbre commutative, chapitres 3 et 4", Hermann, 1961.

[8] J.-L. Brylinski, A differential complex for Poisson Manifolds, *J.Differential Geometry* **28** (1988), 93-114.

[9] D. Eisenbud, "Commutative algebra", Springer-Verlag,1995.

[10] C. Kassel, L' homologie cyclique des algèbres enveloppantes, *Ivent. math.* **91** (1988), 221-251.

[11] J.-L. Loday, "Cyclic Homology", Springer,1997.

[12] S.P. Smith, "Non-commutative Algebraic Geometry", non publié.

[13] C. A. Weibel, "An introduction to homological algebra", Cambridge University Press, 1994.