Polynômes tropicaux et géométrie tropicale

Dominique Castella
Université de La Réunion

Historique et état des lieux :

La géométrie tropicale s'est considérablement développée ces dernières années mais reste cependant très embryonnaire.
Son point de départ est l'utilisation d'objets construits à partir de courbes algébriques (les amibes et leurs squelettes...) qui se sont révélés des outils efficaces pour résoudre certaines questions de type combinatoire.
Ces objets peuvent être définis intrinsèquement à partir de polynômes sur un semi-corps déjà largement utilisé en théorie du contrôle, le semi-corps des réels max-plus. Plusieurs tentatives de formalisation de ces courbes ont été proposées ou sont en cours. Elle se heurte à l'absence des outils algébriques correspondants : de nombreux travaux portent sur l'algèbre linéaire sur ce semi-corps, en vue des applications (même s'il reste à les unifier et les replacer dans un véritable cadre algébrique) mais il n'existe que très peu de travaux sur les outils algébriques de la géométrie tropicale (anneaux de polynômes et fonctions polynomiales, quotients...) Il reste aussi à comprendre les fortes analogies entre la géométrie tropicale et la géométrie algébrique...

Qu'est-ce qu'une courbe tropicale ?

Plaçons nous dans un cas simple : on se donne un polynôme à deux variables sur $\mathbb{C}$, $P = \sum a_{i,j} X^i Y^j$. Il lui est donc associé une courbe Γ ensemble de ses zéros dans $\mathbb{C}^2$. On peut lui associer son amibe $C = Log(\Gamma)$ (où $Log(z_1, z_2) = (\ln(|z_1|), \ln(|z_2|)$ qui est incluse dans $\mathbb{R}^2$ si 0 n'appartient pas à Γ.
Par un procédé un peu plus complexe on définit le squelette de cette amibe (qui peut se voir comme une limite, ou comme un ensemble de points "centraux" de l'amibe et qui apparaît en fait comme très naturel dans les exemples...) Ce squelette qui est une réunion de segment et de demi-droites est ce qu'il est convenu d'appeler une courbe tropicale... On peut caractériser les ensembles de cette forme qui sont des squelettes de courbes algébriques...
D'un point de vue algébrique le recours au log complique les choses et l'on peut aussi bien prendre pour amibe l'ensemble des couples de modules des points de Γ, dans $\mathbb{R}^2_+$.

Pourquoi courbe tropicale ?

Le qualificatif tropical a été donné à l'algèbre sur des semi-anneaux idempotents en l'honneur du Pr. I Simon, qui est brésilien, et l'un des premiers à s'être intéressé à ces anneaux dans ses travaux d'informatique théorique. Les courbes tropicales n'ayant jusqu'ici été étudiée que sur le semi-corps des réels max-plus pourrait donc s'appeler aussi courbes max-plus !
La courbe tropicale définie à partir d'un polynôme $P = \sum a_i, jX^iY^j$ peut aussi être définie par le "polynôme tropical" sur $\mathbb{R}^2_+$, $(x, y) \longmapsto \max(|a_{i,j}|x^iy^j)$: elle apparaît comme l'ensemble des points singuliers de ce polynôme (points de non-différentiabilité... ou... zéros, cf. ci-dessous), ce qui justifie donc a posteriori ce nom.
En fait cette construction est liée à la partition du plan en régions définies par des inégalités sur les monômes de P, $P_{i,j} = \{(z_1, z_2) \in (\mathbb{C}^*)^2 / |a_{i,j} z_1^i z_2^j| \geqslant |a_{k,l} z_1^k z_2^l|, \forall (k, l)\}$; les images $C_{i,j} = Log(P_{i,j})$ de ces parties induisent une partition de C, et la courbe tropicale est la réunion des intersections des $C_{i,j}$ (on peut montrer en effet que ces intersections $C_{i,j} \cap C_{k,l}$ pour $(i, j) \neq (k, l)$ sont bien incluses dans C)... Elle contient donc des informations sur les valeurs du polynôme et sur ses monômes et est plus directement reliée au polynôme qu'à la courbe algébrique elle-même (ce qui explique peut-être la difficulté de la construction classique qui part de la courbe et non du polynôme)... La transformation logarithmique a, elle, pour effet

de linéariser la courbe tropicale qui apparaît comme une réunion de segments et demi-droites, ce qui a bien sûr un grand intérêt géométrique et combinatoire.

Les outils

Le semi-corps utilisé en géométrie tropicale est $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ muni des lois max et + (d'où le nom d'algèbre max-plus). Pour des algébristes il est plus aisé d'utiliser la version $\mathbb{R}_+$ muni de max et $\times$, ou plus généralement de se placer sur un semi-corps $(K, +, \times)$ (même définition qu'un corps à part qu'il n'est pas requis d'avoir un inverse pour l'addition) idempotent (i.e. $x + x = x$ pour tout $x \in K$).
L'idée directrice pour développer les bons outils algébrique et pour rendre compte des similitudes constatées, est de définir un cadre englobant les notions classiques et les notions tropicales comme cas particuliers. La première constatation est qu'il suffit d'ajouter à la définition de semi-corps une condition de "régularité à la Von Neumann" pour l'addition (i.e. pour tout $x \in K$, $x \in x + K + x$), pour obtenir uniquement comme cas particulier les corps et les semi-corps idempotents, qui apparaissent alors comme les "corps de caractéristique 1" (en définissant la caractéristique comme le plus petit entier non nul k, s'il existe, tel que $(k + 1).1_K = 1_K$ et 0 sinon).
Il est alors possible de généraliser la notion de zéros d'un morphisme additif ou d'un polynôme, de sorte qu'en caractéristique 1, cela redonne exactement les notions de singularités utilisées (il y a en fait plusieurs généralisations possibles qui redonne les principales définitions données jusqu'ici en algèbre linéaire tropicale). La courbe tropicale associée à un polynôme tropical apparaît alors bien comme l'ensemble de ses zéros !
De nombreuses autres notions se généralisent et donne des résultats similaires aux résultats classiques (par exemple, les matrices tropicalement singulières sont les zéros du polynôme définissant le déterminant), parfois facilement, parfois de plusieurs façons, parfois incomplètement... Il en est ainsi des notions de noyau, de quotient...

Les résultats

Il est possible de définir une notion particulière de quotient qui est la notion de quotient par un sous-module ou par un idéal (suivant la structure) permettant d'avoir les propriétés attendues (au moins en partie). De plus les techniques de localisations donne encore de bons résultats, à ceci près qu'un semi-anneau intègre ne s'injecte pas en général dans son corps des fractions ! En particulier on ne peut espérer obtenir une bonne correspondance entre les polynômes formels et les fonctions polynomiales. Il faut considérer pour cela les images de ces polynômes dans le corps des fractions rationnelles (ou "polynômes rationnels") pour lesquels, sur les "bons" semi-corps, cette correspondance peut être établie.
Il est alors possible de montrer que l'algèbre des fonctions polynomiales sur une courbe tropicale est isomorphe, comme dans le cas classique, au quotient de l'anneau de polynômes par l'idéal engendré par un polynôme définissant la courbe.

Les perspectives et les questions

Même si des tentatives ont été faites de définition de variétés tropicales, un certain nombre de questions se posent. L'intersection ensemblistes de "variétés tropicales" n'en est pas une par exemple... Deux droites "parallèles" peuvent n'être ni disjointe ni confondue et leur intersection n'est pas alors une variétés algébriques !
Il ne semble d'autre part pas facile de caractériser les "vrais" variétés tropicales par des propriétés de leurs algèbres de fonctions... Tout se passe comme si la classe des "variétés tropicales", définies pour "coller" avec les sous-ensembles obtenues à partir des variétés algébriques n'avaient pas une définition algébrique intrinsèque simple... Il existe des "ensembles algébriques" plus

généraux auxquels on peut attacher de la même façon une algèbre de fonctions polynomiales et les isomorphismes entre les algèbres de fonctions donnent des morphismes bijectifs entre des variétés et des "ensembles algébriques" qui n'en sont pas!!!

Exemples
Ce point est évidemment à traiter en parallèles aux autres... Exemples d'amibes et de squelettes... Exemple de conique tropicale... Exemples d'algèbre de fonctions polynomiale...etc...

REFERENCES

[1] M. Akian, R. Bapat, S. Gaubert, Max-plus algebras, Handbook of Linear Algebra (Discrete Mathematics and Its Applications, L.HOGBEN ed.), Chapter 25, vol. 39, Chapman & Hall/CRC 2006.

[2] D. Castella, L'algèbre tropicale comme algèbre de la caractéristique 1 : Algèbre linéaire sur les semi-corps idempotents, arXiv :math.AC/0807.3088.

[3] I. Itenberg, G. Mikhalkin, E. Shustin, Tropical algebraic geometry. Oberwolfach Seminars, 35, Birkhauser (2007).

[4] Z. Izhakian, Tropical arithmetic and algebra of tropical matrices, arXiv :math. AG/0505458.

[5] Z. Izhakian, Tropical varieties, ideals and an algebraic nullstensatz, arXiv :math. AC/0511059.

[6] Z. Izhakian, The tropical rank of a tropical matrix, arXiv :math.AC/0604208.

[7] Z. Izhakian, L. Rowen, Supertropical algebra, arXiv :math.AC/0806.1171.

[8] G. Mikhalkin, Amoebas of algebraic varieties and tropicalgeometry. Different faces of geometry, Int. Math. Ser.(N.Y.), vol.3, Kluwer/Plenum, NewYork, 2004, p. 257–300.

[9] G. Mikhalkin, Enumerative tropical algebraic geometry in $\mathbb{R}^2$, J. Amer. Math. Soc. 18 (2005) 313-377.

[10] J. Richter-Gébert, B. Sturmfels, T. Theobland, First steps in tropical geometry, Contemporary Mathematics, 377, Amer. Math. Soc. (2005), 289-317.

[11] E. Shustin, Z. Izhakian, A tropical nullstensatz. Proc. Amer. Math. Soc. 135 (12), 3815,3821 (2007).