

UNIVERSITÉ PARIS-13
INSTITUT GALILÉE

Année universitaire 2008-2009

DOCUMENT DE SYNTHÈSE
HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

Discipline : Mathématiques

présentée et soutenue publiquement par

Benoît RITTAUD

le 4 décembre 2008

Suites de Fibonacci aléatoires
et fractions continues de Rosen

JURY

Jean-Paul ALLOUCHE	Directeur de recherche	Université Paris-11
Pierre ARNOUX	Professeur	Université Aix-Marseille-II
Cor KRAAIKAMP	Professeur adjoint	Université de Delft
François PARREAU	Professeur	Université Paris-13
Marc PEIGNÉ	Professeur	Université de Tours
Ricardo PEREZ-MARCO	Directeur de recherche	Université Paris-13
Clément SIRE	Directeur de recherche	Université Toulouse-III

Table des matières

1	Suites de Fibonacci aléatoires	9
1.1	Présentation	9
1.1.1	Suites de Fibonacci aléatoires classiques	9
1.1.2	Suites de Fibonacci aléatoires généralisées	11
1.2	Vitesse de croissance	12
1.2.1	Facteur de croissance des moyennes	12
1.2.2	Facteur de croissance presque sûr	24
1.2.3	Propriétés des arbres restreints	27
1.3	Perspectives de recherche	28
1.3.1	La conjecture de Zaremba	28
1.3.2	Pour des $\lambda < 2$ différents de ceux de Rosen	28
1.3.3	Comportement de la branche gauche	29
1.3.4	Propriétés des mesures $\nu_{k,p}$	30
1.3.5	Aspect matriciel	31
1.3.6	Moments d'ordre supérieur	32
1.3.7	Avec plusieurs pièces	32
1.3.8	“Passage à la limite” dans \mathbf{R}_1 et dynamique substitutive	32
1.3.9	Autres pistes	33
2	Fractions continues de Rosen et généralisations	35
2.1	Fractions continues de Rosen et au-delà	36
2.1.1	Symboliques croisées de la dichotomie et des fractions continues	36
2.1.2	Bases entières et fractions continues de Rosen	37
2.1.3	Bases non-entières et fractions continues généralisées	39
2.2	Sur des λ -fractions continues avec $\lambda > 2$	40
2.2.1	Propriétés des φ_k -fractions continues	41
2.2.2	Quelques pistes pour la conjecture 1	43
3	Équirépartition modulo 1	45
4	Autres travaux	53
4.1	Équation de Markoff et généralisations	53
4.2	Réduites d'un quadratique et schémas numériques	55

4.3	La disjonction faible	57
4.4	Une inégalité de Koksma dans $O(1/n)$	59

Introduction

Quot paria coniculorum in uno anno ex uno pario germinentur. Quidam posuit unum par coniculorum in quodam loco, qui erat undique pariete circumdatus, ut sciret, quot ex eo paria germinarentur in uno anno : cum natura eorum sit per singulum mensem aliud par germinare ; et in secundo mense ab eorum natiuitat germinant. Quia suprascriptum par in primo mense germinat, duplicabis ipsum, erunt paria duo in uno mense. (...)

Léonard de Pise, *Liber Abaci* (1202).

Le présent document présente une synthèse des articles [5], [34], [43], [52], [53], [54], [55], [56] (parus ou acceptés pour publication) et [6], [35], [36], [57], [58] (soumis pour publication), ainsi qu'un ensemble de pistes de recherches qui leur sont liées. Il est principalement centré sur le contenu des articles [34], [35], [36] et [56].

Le premier chapitre s'intéresse aux suites de Fibonacci aléatoires, qui font l'objet des articles [34], [35], [36] et [56]. Le choix de développer et détailler davantage cette partie des travaux tient à ce que, outre qu'ils sont les plus récents, ce sont ceux pour lesquels se dessinent le plus de perspectives de recherches. Ces travaux doivent beaucoup à l'intérêt qu'Élise Janvresse et Thierry de la Rue (CNRS - Laboratoire de Mathématiques Raphaël Salem, Université de Rouen) ont bien voulu porter à la question. C'est peu dire que leurs apports sur les questions de facteur de croissance pour presque toute suite de Fibonacci aléatoire ont été décisifs. Aussi est-ce avec plaisir et reconnaissance que je leur exprime ici, outre ma plus sincère amitié, toute ma gratitude pour la collaboration fructueuse que nous avons entretenue sur ce sujet et qui, je le souhaite, ne s'arrêtera pas là.

Les suites de Fibonacci aléatoires et leurs multiples généralisations constituent un sujet d'investigation que les travaux existants n'ont pas épuisé. Aux résultats sur les facteurs de croissance en moyenne et presque sûr pour certaines généralisations des suites de Fibonacci aléatoires font suite quantité d'autres

questions qui semblent d'un certain intérêt et qui sont liées à la théorie des nombres, à la théorie ergodique, à la dynamique substitutive ou encore à la combinatoire des structures arborescentes.

L'une des ramifications de ce sujet concerne les fractions continues de Rosen, une généralisation naturelle des fractions continues qui, pour faire bref, sont aux fractions continues usuelles ce que les bases entières de numération sont à la base 2. Les structures combinatoires qui apparaissent lors de l'étude de certaines généralisations des suites de Fibonacci aléatoires (et plus spécifiquement le facteur de croissance en moyenne) montrent une parenté forte entre les deux objets. Comprendre l'un doit donc permettre de mieux comprendre l'autre. Le chapitre 2 est consacré aux fractions de Rosen en tant que telles, ainsi qu'à une généralisation qui pourrait se révéler pertinente, à la fois pour son intérêt propre et pour l'étude de suites de Fibonacci encore plus générales. (Un article est en préparation sur le sujet.)

Également dans le chapitre 2, nous présentons une seconde piste de généralisation des fractions continues de Rosen, dont il n'a pour l'instant malheureusement pas été possible de démontrer la conjecture centrale. Cet autre type de généralisation a ceci de particulier qu'elle concerne des λ -fractions continues dans lesquelles le paramètre λ est plus grand que 2, un cas qui, pour des raisons qui relèvent principalement de la géométrie hyperbolique, semble n'avoir encore jamais fait l'objet d'études approfondies.

Le chapitre 3 concerne la théorie de l'équirépartition modulo 1. Il fait la synthèse des articles [52], [53], [54] et [55]. Le parti de moins entrer dans les détails de ces résultats se justifie, outre la technicité parfois aride que ces détails impliqueraient, par le fait que ces travaux forment un tout que l'on peut considérer comme achevé, au sens où ils n'offrent pour l'instant guère de perspectives directes de prolongements (par ailleurs, les contenus des articles [52] et [53] figurent déjà dans la thèse de doctorat de l'auteur). C'est avec reconnaissance que je remercie Emmanuel Lesigne (Laboratoire de Mathématiques et Physique Théorique, Université de Tours) pour les conseils qu'il a bien voulu me prodiguer durant la rédaction de ces articles.

Les travaux contenus dans les articles [5], [6], [43], [57] et [58], ainsi que certains prolongements possibles, sont évoqués dans le chapitre 4. Nous n'en donnons qu'un bref aperçu, soit parce qu'une bonne part de leur contenu figure déjà dans la thèse de doctorat de l'auteur (c'est le cas pour la notion de "disjonction faible" apparue dans l'article [43]), soit parce que, pour l'instant, n'apparaissent guère de perspectives nouvelles pour prolonger les résultats obtenus ([43], ainsi que [57] sur les schémas numériques et les sous-suites de réduites d'irrationnels quadratiques), soit enfin parce qu'il est encore trop tôt pour déterminer si les idées mises en œuvre sont appelées à connaître des prolongements intéressants. Ce dernier point concerne les articles [58] sur l'inégalité de Koksma dans $O(1/n)$, ainsi que [5] et [6], qui concernent l'équation de Markoff et l'une de ses généralisations, dite de Vulakh-Schmidt. Pour ces deux derniers,

je remercie Ryuji Abe (Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme, Université de Caen) pour notre collaboration sur ce sujet, ainsi que pour m'avoir initié aux problématiques de l'équation de Markoff; je lui souhaite par ailleurs d'obtenir rapidement un poste stable et exprime le vœu de voir se poursuivre notre actuelle collaboration.

J'exprime encore toute ma reconnaissance à Pierre Arnoux, Michel Mendès-France, François Parreau et Karl Petersen pour avoir accepté d'être rapporteurs du présent travail. Mes remerciements vont aussi, bien sûr, aux membres du jury de la soutenance de cette habilitation.

Chapitre 1

Suites de Fibonacci aléatoires

1.1 Présentation

1.1.1 Suites de Fibonacci aléatoires classiques

Une *suite de Fibonacci* se définit par ses deux premiers termes, F_0 et F_1 et, pour tout $n \geq 2$, par la relation de récurrence

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Un résultat classique, démontré par Édouard Lucas [46], indique que les rapports F_{n+1}/F_n tendent vers $\varphi := (1 + \sqrt{5})/2$, sous réserve que le rapport F_1/F_0 soit différent de $-1/\varphi$ (et que, bien sûr, F_0 et F_1 ne soient pas tous les deux nuls).

Donnons-nous une pièce de monnaie, qui tombe sur pile avec probabilité p et sur face avec probabilité $1 - p$ ($p \in [0, 1]$ étant préalablement fixé). Dans cette sous-section, nous appelons *suite de Fibonacci aléatoire (non linéaire)* une suite $(F_n)_{n \geq 0}$ définie de la manière suivante : F_0 et F_1 étant choisis (positifs, tous deux non nuls), pour tout $n \geq 2$, on pose

$$F_n := \begin{cases} F_{n-1} + F_{n-2} & \text{si le } n\text{-ième lancer donne pile;} \\ |F_{n-1} - F_{n-2}| & \text{si le } n\text{-ième lancer donne face.} \end{cases}$$

Par suite de Fibonacci aléatoire *linéaire* on entend une suite de Fibonacci aléatoire dans laquelle, quand le n -ième lancer donne face, F_n est défini par $F_{n-1} - F_{n-2}$ (et non par $|F_{n-1} - F_{n-2}|$).

Posons $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $L' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, et notons, pour tout $n \geq 0$, $X_n := (F_n, F_{n+1})$. Une suite de Fibonacci aléatoire linéaire correspond ainsi à un produit (à droite) de matrices aléatoires choisies dans

l'ensemble $\{R, L\}$, selon un schéma de Bernoulli de loi $(p, 1-p)^{\otimes \mathbb{N}}$. Le cas non-linéaire, quant à lui, correspond au cas où l'on impose à X_n la condition de n'avoir que des composantes positives et où, pour chaque n où le lancer donne face, L est éventuellement remplacé par L' lorsque cela est nécessaire pour satisfaire cette condition sur X_n .

Une problématique générale des suites de Fibonacci aléatoires et de leurs variantes consiste à déterminer si, à l'instar de ce qui se produit pour la suite de Fibonacci classique, elles possèdent un facteur de croissance (sous-entendu : asymptotique). Deux aspects de cette question vont ici retenir notre attention : la croissance des moyennes (ou "en moyenne") et la croissance presque sûre.

Désignons par Ω l'ensemble $\{\text{pile, face}\}^{\mathbb{N}}$ muni de la probabilité $(p, 1-p)^{\otimes \mathbb{N}}$ et notons génériquement $(F_n(\omega))_n$ (ou, plus simplement, $(F_n)_n$) une suite de Fibonacci aléatoire, où $\omega \in \Omega$. Étudier le facteur de croissance des moyennes revient à étudier la limite des rapports $\mathbb{E}(F_n)/\mathbb{E}(F_{n-1})$. Notons que seul le cas des suites de Fibonacci non-linéaires a de l'intérêt dans ce cadre, puisque $\mathbb{E}(F_n)$ est triviale dans le cas linéaire.

Pour le facteur de croissance presque sûr, des arguments triviaux montrent que les rapports $|F_n(\omega)|/|F_{n-1}(\omega)|$ ne peuvent converger que pour de rares ω . Pour cette raison, il convient plutôt de s'intéresser à la convergence de l'expression $|F_n(\omega)|^{1/n}$, de portée un peu plus faible. Les cas linéaires et non-linéaires présentent tous deux de l'intérêt dans ce cadre, et ne se confondent que dans le cas où $p = 1/2$.

Historiquement, c'est principalement le cas du facteur de croissance presque sûr qui a été considéré. Il apparaît implicitement, comme cas particulier, dans un résultat de Harry Furstenberg [27] qui exprime l'exposant de Lyapounov d'un produit de matrices aléatoires comme une intégrale sur l'espace projectif d'une mesure invariante pour une marche aléatoire. Plus précisément : si, par exemple, A et B sont deux matrices de dimension 2, soit ν la mesure sur $\mathbb{P}^1\mathbb{R}$ invariante par l'action de la marche aléatoire définie par A et B avec équiprobabilité. Pour tout \bar{x} de $\mathbb{P}^1\mathbb{R}$ dont on note x un représentant quelconque dans \mathbb{R}^2 , définissons la quantité

$$\text{amp}(\bar{x}) := \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\|Bx\|}{\|x\|} \right).$$

Entre autres, le résultat de Furstenberg énonce que, presque sûrement, l'exposant de Lyapounov du produit de n matrices aléatoires prises dans l'ensemble $\{A, B\}$ croît avec n selon un facteur γ donné par :

$$\gamma = \int_{\mathbb{P}^1\mathbb{R}} \text{amp}(\bar{x}) d\nu.$$

Pour déterminer une valeur explicite de γ lorsque A et B sont connues, toute la difficulté consiste à exprimer de façon exploitable la mesure invariante ν .

Il existe des méthodes générales pour exprimer la croissance d'un exposant de Lyapounov d'un produit de matrices aléatoires (voir [19]). Les suites de

Fibonacci aléatoires, en raison du coefficient négatif -1 qu'elles font apparaître dans la matrice L , produisent un exemple particulièrement simple pour lequel aucune de ces méthodes ne s'applique. D'autre part, sauf dans le cas $p = 1/2$, le cas non-linéaire ne se réduit pas à un produit de matrices aléatoires choisies de manière indépendantes et identiquement distribuées.

En 2000, Divakar Viswanath [68] a explicité la mesure invariante ν pour les suites de Fibonacci aléatoires avec $p = 1/2$, en l'exprimant à partir de la partition de Stern-Brocot des réels. La formule obtenue exprime le facteur de croissance cherché comme l'intégrale d'une fraction rationnelle de degré 4 selon la mesure ν . Un élément important du travail consiste alors à obtenir un encadrement précis de la valeur de cette intégrale, le résultat étant la valeur $1,13198824\dots$, dont on ignore à l'heure actuelle s'il existe une expression algébrique ou analytique.

En 2006, Eran Makover et Jeffrey McGowan [47] ont pensé donner un encadrement de cette constante $1,13198824\dots$ à partir de calculs élémentaires sur les valeurs possibles de F_{n+3} connaissant celles de F_n et de F_{n+1} . Leur raisonnement était malheureusement fautif, d'une part parce que leur méthode relève en réalité d'une tentative d'estimer une croissance moyenne et non presque sûre, d'autre part parce qu'une obstruction cachée l'empêche même de donner un encadrement du facteur de croissance des moyennes autrement que par accident. L'idée de considérer l'ensemble des descendants possibles d'une paire (F_n, F_{n+1}) est néanmoins intéressante et, convenablement exploitée, conduit à envisager l'ensemble des suites de Fibonacci aléatoires comme un arbre binaire. Cette approche est fructueuse, car un sous-arbre de cet arbre binaire contenant toute l'information peut être extrait, à partir duquel il est possible, *via* une étude combinatoire, d'exprimer le facteur de croissance des moyennes des suites de Fibonacci aléatoires comme la racine réelle du polynôme $y^3 + y^2 - y - 2$ (voir 1.2.1). Comme il est démontré dans [56], cette racine vaut $1,20556943\dots$, un résultat qui, en passant, permet d'observer que, conformément à l'inégalité de Jensen, le facteur de croissance des moyennes est supérieur à la valeur $1,13198824\dots$ correspondant au facteur de croissance presque sûr.

1.1.2 Suites de Fibonacci aléatoires généralisées

Il y a bien sûr de multiples manières de généraliser les suites de Fibonacci aléatoires. Par exemple, Eli Ben-Naim et Paul Krapivsky [11] ont remplacé, dans la définition de F_n , l'expression $|F_{n-1} - F_{n-2}|$ par l'expression $F_{n-1} + F_{n-3}$ lorsque le n -ième lancer de la pièce donne face, et ont montré que, lorsque p tend vers 1, le facteur de croissance presque sûr se comporte comme $\varphi \cdot (2\varphi/(2 + \varphi))^{(1-p)}$ (voir aussi [64]).

Nous allons nous intéresser ici à une généralisation particulièrement riche, qui consiste en l'ajout d'un simple coefficient $\lambda > 0$ dans la définition de F_n , selon les modalités suivantes :

$$F_n := \begin{cases} \lambda F_{n-1} + F_{n-2} & \text{si le } n\text{-ième lancer donne pile;} \\ |\lambda F_{n-1} - F_{n-2}| & \text{si le } n\text{-ième lancer donne face.} \end{cases}$$

C'est là la définition des (λ, p) -suites de Fibonacci aléatoires. Là encore, il y a lieu de distinguer entre un cas *non-linéaire* (ci-dessus) et un cas *linéaire*, dans lequel, dans la seconde ligne, $|\lambda F_{n-1} - F_{n-2}|$ est remplacé par $\lambda F_{n-1} - F_{n-2}$.

Notons, avant d'aller plus loin, que l'idée tentante d'introduire un second coefficient μ et de poser $F_n := |\lambda F_{n-1} \pm \mu F_{n-2}|$ ne produit pas une définition significativement plus générale, car le simple changement de variable $G_n := F_n/\mu^{n/2}$ forme une suite définie par $G_n = |(\lambda/\sqrt{\mu})G_{n-1} \pm G_{n-2}|$, ce qui nous ramène au cas où $\mu = 1$.

Mark Embree et Lloyd Trefethen [25] ont montré que, quel que soit $\lambda > 0$, presque toute $(\lambda, 1/2)$ -suite de Fibonacci aléatoire possède un facteur de croissance égal à $\gamma = \gamma_{1/2, \lambda}$, indépendamment du choix des valeurs de F_0 et F_1 . Se pose, bien sûr, la question de la valeur explicite de $\gamma_{1/2, \lambda}$, ainsi que la généralisation du résultat au cas où p n'est plus égal à $1/2$. On trouve par ailleurs, dans l'article de Makover et McGowan [47] cité plus haut, une étude portant sur le cas $p = 1/2$ et certaines valeurs de λ , notamment pour déterminer le comportement du moment d'ordre 2 des variables aléatoires F_n .

1.2 Vitesse de croissance

Les travaux que nous présentons ici sont parus ou soumis pour publication dans [56], [34], [35] et [36]. Ils s'inscrivent dans l'étude des facteurs de croissance en moyenne et presque sûr pour les (λ, p) -suites de Fibonacci aléatoires, dans les cas linéaire et non-linéaire. Comme nous le verrons, ils concernent les cas où $p \in [0, 1]$ est quelconque et où λ est un élément de $\{2 \cos(\pi/k) : k \text{ entier}, k \geq 3\} \cup [2, +\infty[$.

1.2.1 Facteur de croissance des moyennes

Dans cette partie, nous n'envisageons que le cas des suites de Fibonacci aléatoires non-linéaires.

Nous savons caractériser le facteur de croissance de la valeur moyenne d'une suite de Fibonacci aléatoire pour n'importe quelle valeur de p et pour deux types de valeurs de λ :

- les valeurs supérieures ou égales à 2, très simples à traiter en raison du fait que, dans ce cas, toute (λ, p) -suite de Fibonacci aléatoire est strictement croissante ;
- les valeurs de λ de la forme $2 \cos(\pi/k)$ (où $k \geq 3$ est un entier), plus difficiles mais aussi plus intéressantes, et par ailleurs liées aux fractions continues de Rosen (*cf.* chapitre 2).

Par souci de clarté, nous donnons d'abord les idées à l'œuvre dans le cas $\lambda = 1$ et $p = 1/2$, puis les outils complémentaires pour traiter le cas $\lambda = 1$ et $p \in [0, 1]$ quelconque, et enfin l'ultime généralisation au cas $\lambda = 2 \cos(\pi/k)$. Pour finir, et par souci d'exhaustivité, le cas $\lambda \geq 2$, très simple, est rapidement mentionné, sans entrer dans ses détails. Un intérêt de ce cas est qu'il permet de démontrer que la fonction qui, à p fixé, associe à tout λ la valeur du facteur de

croissance des moyennes des (λ, p) -suites de Fibonacci aléatoires ne peut être analytique en $\lambda = 2$.

Le cas $\lambda = 1$ et $p = 1/2$ est paru dans [56], le cas plus général où $\lambda = 2 \cos(\pi/k)$ (k entier, $k \geq 3$) et où p est quelconque, ici partagé en deux par souci de clarté, est soumis pour publication [35].

Le cas $\lambda = 1$ et $p = 1/2$

Dans [56] est énoncé le résultat suivant (Theorem 1, page 2) :

Théorème 1. *Quels que soient F_0 et F_1 positifs non tous deux nuls, la suite des rapports $\mathbb{E}(F_{n+1})/\mathbb{E}(F_n)$ converge vers $\alpha - 1 \approx 1,20556943$, où α est l'unique réel pour lequel $\alpha^3 = 2\alpha^2 + 1$.*

Il est apparu après publication que la démonstration proposée était en fait lacunaire, comme nous l'expliquons plus loin. La lacune a été corrigée dans [35].

Pour expliquer les idées de la démonstration de ce théorème, posons pour commencer $F_0 = F_1 = 1$ et notons \mathbf{T}_1 l'arbre binaire dont la racine est étiquetée de la valeur de F_0 , son unique enfant de la valeur de F_1 et, à partir de là, dont chaque nœud b de parent a a pour enfant gauche $|b - a|$ et pour enfant droit $b + a$. L'arbre commence ainsi :

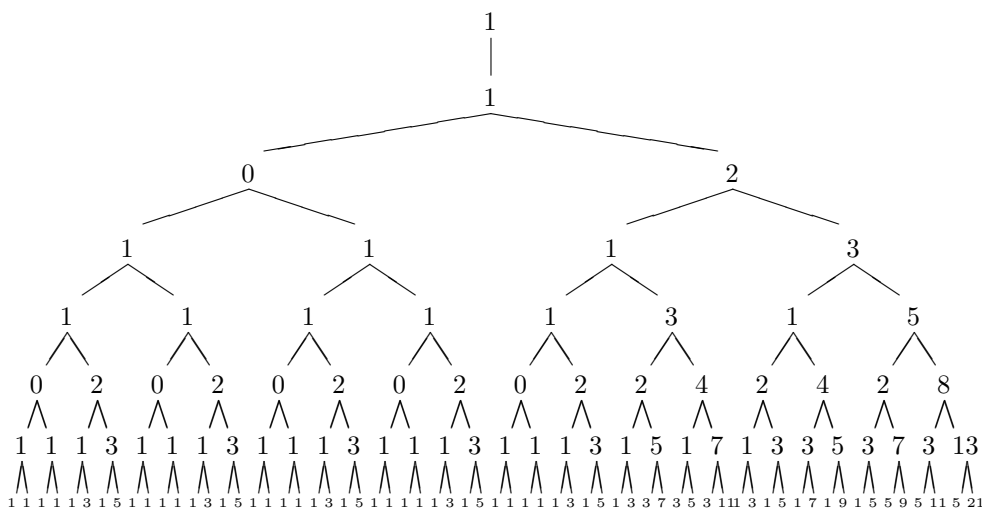


Figure 1 - L'arbre \mathbf{T}_1 des suites de Fibonacci aléatoires dont les deux premiers termes valent 1.

Remarquons en passant que la suite formée en lisant l'arbre de gauche à droite et de haut en bas est une suite *2-régulière* au sens donné par Jean-Paul Allouche et Jeffrey Shallit (voir [8] et [9], ainsi que [7]).

La valeur de $\mathbb{E}(F_n)$ est donnée par $S_n/2^{n-1}$, où S_n est la somme des étiquettes des nœuds de la n -ième ligne de \mathbf{T}_1 (la ligne correspondant à la racine porte conventionnellement le numéro 0). Tout le problème revient donc à étudier la suite $(S_n)_n$. Pour cela, l'idée maîtresse consiste à définir un sous-arbre de \mathbf{T}_1 , noté \mathbf{R}_1 , l'*arbre réduit*, qui en un sens contient toute l'information donnée par \mathbf{T}_1 .

Par définition des suites de Fibonacci aléatoires, une arête (a, b) de \mathbf{T}_1 étant donnée, tout le sous-arbre qu'il engendre est uniquement déterminé. La construction de l'arbre \mathbf{R}_1 consiste à supprimer toutes les arêtes redondantes de \mathbf{T}_1 . Plus précisément, on supprime de \mathbf{T}_1 toutes les arêtes (a, b) déjà apparues plus haut dans \mathbf{T}_1 . Pour des raisons techniques, on supprime également le 0 qui apparaît à la deuxième ligne, et l'on considère l'unique enfant de la racine comme un enfant gauche.

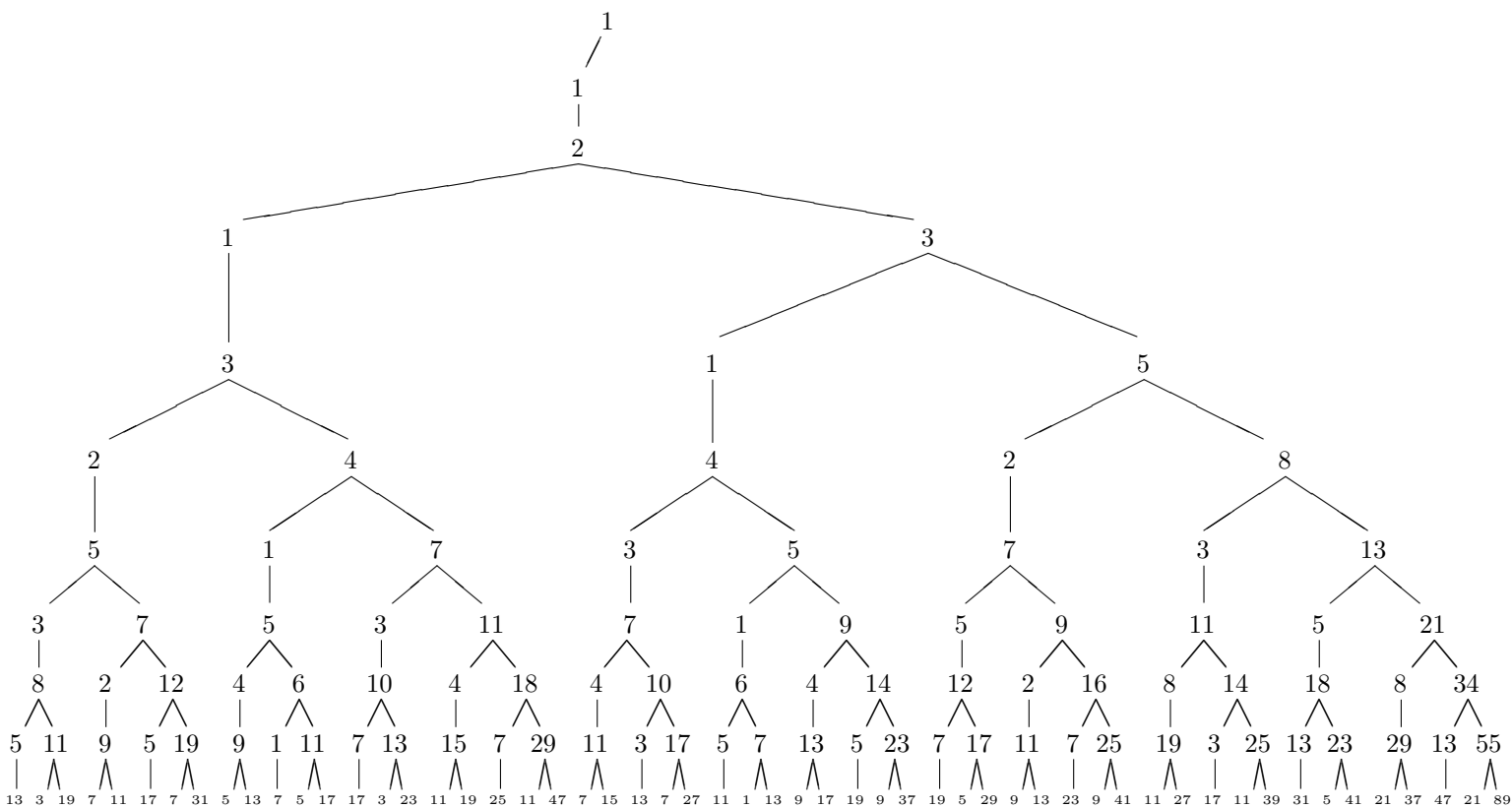


Figure 2 - L'arbre \mathbf{R}_1 (les arêtes verticales correspondent toujours à un enfant droit).

Remarquons à nouveau en passant que la suite constituée en lisant cet arbre de gauche à droite et de haut en bas est une suite φ -régulière au sens d'Allouche-Shallit (*cf.* à nouveau [8] et [9]).

L'arbre \mathbf{R}_1 est susceptible d'au moins deux autres définitions équivalentes (la démonstration est élémentaire).

Proposition 1. *L'arbre \mathbf{R}_1 , plus gros sous-arbre de \mathbf{T}_1 dans lequel on ne trouve jamais deux fois une même arête (a, b) , est aussi :*

- *le plus gros sous-arbre de \mathbf{T}_1 dans lequel chaque enfant droit a deux enfants et chaque enfant gauche un unique enfant, qui est droit ;*
- *le plus gros sous-arbre de \mathbf{T}_1 dont chaque enfant gauche a son parent strictement supérieur à son grand-parent.*

En plus de constituer l'outil fondamental pour l'étude du facteur de croissance des suites de Fibonacci aléatoires, l'arbre \mathbf{R}_1 , ainsi que ses généralisations données plus loin, dispose de propriétés qui lui confèrent un intérêt propre en théorie des nombres, propriétés sur lesquelles nous reviendrons en section 1.2.3.

Restons-en pour l'instant aux suites de Fibonacci aléatoires, et introduisons les notations suivantes.

- Pour tout $n \geq 0$, on désigne par
 - τ_n la n -ième ligne d'arêtes de \mathbf{T}_1 (on a ainsi $\tau_1 = \{(1, 1)\}$, $\tau_2 = \{(1, 0), (1, 2)\}$, $\tau_3 = \{(0, 1), (0, 1), (2, 1), (2, 3)\}$, etc.) ;
 - ρ_n la n -ième ligne de \mathbf{R}_1 (on a ainsi $\rho_1 = \{(1, 1)\}$, $\rho_2 = \{(1, 2)\}$, $\rho_3 = \{(2, 1), (2, 3)\}$, etc.).
- Pour tout ensemble X d'arêtes de \mathbf{T}_1 , on désigne par
 - $s(X)$ l'ensemble des arêtes enfants (dans \mathbf{T}_1) de toutes les arêtes de X (on a ainsi $s(\tau_n) = \tau_{n+1}$ pour tout n) ;
 - $S(X)$ la somme des valeurs des deuxièmes composantes de tous les éléments de X .

Notons que, pour tout n , on a $s(\tau_n) = \tau_{n+1}$, et $S(\tau_n) = S_n$. L'objectif est de décrire le comportement de $S(\tau_n)$.

Une propriété remarquable de l'arbre \mathbf{R}_1 est que la suite $(\text{Card}(\rho_n))_{n \geq 1}$ n'est autre que la suite de Fibonacci ; c'est là une conséquence directe de la première caractérisation de \mathbf{R}_1 donnée dans la proposition 1. Une autre propriété, plus inattendue, concerne la somme des nœuds de chaque ligne de \mathbf{R}_1 .

Proposition 2. *Pour tout $n \geq 4$, on a :*

$$S(\rho_n) = 2S(\rho_{n-1}) + S(\rho_{n-3}).$$

Enfin, une dernière propriété cruciale concerne les enfants de chaque ligne de \mathbf{R}_1 .

Proposition 3. *Pour tout $n \geq 3$, on a :*

$$s(\rho_n) = \rho_{n+1} + \rho_{n-2}.$$

Les deux propriétés précédentes sont de démonstrations élémentaires. S'agissant de la seconde, on la démontre en observant que, dans \mathbf{T}_1 , la marche qui part de l'arête (a, b) et qui va une fois à droite puis deux fois à gauche atteint une arête elle aussi égale à (a, b) . Toutes les redondances de l'arbre \mathbf{T}_1 s'obtiennent d'ailleurs de cette manière. Notons que ces deux propositions restent vraies lorsqu'on a affaire à des arbres construits à partir des suites de Fibonacci dont les deux premiers termes ne sont pas nécessairement tous deux égaux à 1.

La proposition 2 indique que la suite $(S(\rho_n))_n$ est à croissance exponentielle et de facteur égal à l'unique racine réelle α de l'équation $x^3 = 2x^2 + 1$ (notons que les conjugués de α sont strictement inférieurs à 1 en module, ce qui fait de α un nombre de Pisot).

L'idée suivante consiste à se servir de la proposition 3 comme d'une règle combinatoire permettant d'exprimer τ_n sous la forme d'une combinaison linéaire des ρ_1, \dots, ρ_n . Puisque nous connaissons une expression explicite et maniable de la suite $(S(\rho_n))_n$ grâce à la proposition 2, un résultat analogue doit pouvoir se déduire pour la suite $(S(\tau_n))_n$. La chose est en effet possible mais, pour des raisons techniques, il est plus simple de travailler avec des arbres construits à partir d'une racine égale à 1 mais dont l'enfant est étiqueté φ (ou φ^{-1}) au lieu de 1. Nous remplaçons alors dans \mathbf{T}_1 et dans \mathbf{R}_1 toutes les étiquettes des nœuds par celles qui correspondent pour les suites de Fibonacci aléatoires dont les deux premiers termes valent respectivement 1 et φ (le cas où le second terme est égal à φ^{-1} se traiterait de manière similaire). Les propriétés 2 et 3 restent vraies pour ces nouveaux arbres. Pour notre étude combinatoire, la principale différence est la suivante : pour nos nouveaux arbres, on a la relation

$$s(\rho_3) = \rho_4 + \varphi^{-1}\rho_2,$$

où, de manière générale, l'expression cX désigne, en un sens évident, l'ensemble d'arêtes obtenu en multipliant les deux composantes de chaque arête de X par la constante c . L'expression cherchée de τ_n en fonction des ρ_i ($i \leq n$) s'obtient alors *via* l'introduction d'un ensemble auxiliaire d'arêtes, défini pour tout $m \geq 2$ par :

$$\nu_m := \sum_{i=0}^{\lfloor m/2 \rfloor - 1} \varphi^{-i} \rho_{m-2i}.$$

L'ensemble ν_m traduit en termes de lignes de \mathbf{R}_1 l'ensemble des lignes de \mathbf{T}_1 que l'on peut atteindre en partant de la racine et en suivant une marche de m arêtes de long. Cet ensemble ν_m ne correspond pas à τ_n , car dans ν_n il n'est pas tenu compte de ce qu'il y a plusieurs manières, en général, d'atteindre une ligne de \mathbf{T}_1 de la forme $\varphi^i \rho_{m-2i}$. Le lien exact entre τ_n et les μ_m est donné par la proposition suivante.

Proposition 4. *Pour tout $n \geq 0$, on a*

$$\tau_{n+2} = s^n(\rho_2) = \sum_{m=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \left(\binom{n}{m} - 2 \binom{n}{m-1} \right) \nu_{n+2-3m}.$$

Lorsque $m = n/3$, le coefficient $\binom{n}{m} - 2\binom{n}{m-1}$ possède l'interprétation combinatoire suivante : il dénombre les façons distinctes qu'il y a de joindre, sur le réseau \mathbb{Z}^2 , le point origine $(0, 0)$ au point $(m, 3m)$ en se déplaçant selon les vecteurs de base $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$ sans jamais passer au-dessus de la droite d'équation $y = 2x$ (cf. [65], suite A001764). Plus généralement, le coefficient rend compte combinatoirement du fait que, dans \mathbf{R}_1 , il n'est pas permis d'aller deux fois de suite à gauche.

Il n'est malheureusement pas possible de conclure directement en injectant l'approximation $S(\rho_n) \approx \alpha^n$ dans la proposition 4, parce que la relation donnée par cette proposition affecte les plus gros coefficients aux ν_i de plus petits indices, qui impliquent eux-mêmes les ρ_i de plus petits indices. Un travail plus fin d'encadrement est donc nécessaire, au cours duquel il faut démontrer que l'influence des deux autres racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique de $S(\rho_n)$ ($x^3 = 2x^2 + 1$, d'après la proposition 2) peut effectivement être négligée. Cela fait, un dernier calcul montre finalement que le facteur de croissance de la suite $(S(\tau_n))_n$ est égal à $\alpha(1 + \alpha^{-3})$, qui est égal à $2\alpha - 2$ d'après la relation $\alpha^3 = 2\alpha^2 + 1$. Enfin, le facteur de croissance de $\mathbb{E}(F_n)$ est la moitié de celui de $S(\tau_n)$ puisque le nombre de nœuds dans l'arbre \mathbf{T}_1 double à chaque ligne. On obtient donc que le facteur de croissance de $\mathbb{E}(F_n)$ est égal à $\alpha - 1$.

Pour que le théorème 1 soit complètement démontré, il reste à adapter le résultat précédent lorsque F_0 et F_1 ne sont pas nécessairement égaux à 1 et φ . Un raisonnement erroné publié dans [56] prétendait le faire en remarquant que le raisonnement précédent fonctionne de la même manière lorsque $(F_0, F_1) = (1, \varphi^{-1})$, en remplaçant simplement φ^{-1} par φ^{-2} dans l'expression de $s(\rho_3)$ et la définition de ν_m précédentes. (Le facteur de croissance final est toujours $\alpha - 1$.) Il était ensuite proposé d'écrire n'importe quel arbre $\mathbf{T}_1^{(a,b)}$ des suites de Fibonacci aléatoires telles que $F_0 = a$ et $F_1 = b$ comme combinaison linéaire des arbres $\mathbf{T}_1^{(1,\varphi)}$ et $\mathbf{T}_1^{(1,\varphi^{-1})}$ pour conclure. La fausseté de ce raisonnement provient de ce que, en raison de la présence des valeurs absolues dans la définition des suites de Fibonacci aléatoires non-linéaires, les arbres $\mathbf{T}_1^{(a,b)}$ ne peuvent pas, en général, se décomposer ainsi.

La solution passe par une définition des ν_m qui ne dérive pas de la relation $s(\rho_3) = \rho_4 + \varphi^{-1}\rho_2$. Une façon correcte de procéder consiste à s'intéresser à la *branche gauche* de $\mathbf{T}_1^{(a,b)}$, c'est-à-dire à la suite $(\ell_n)_n$ définie par

$$\ell_1 = a \quad \ell_2 = b \quad \ell_n = |\ell_{n-1} - \ell_{n-2}| \quad (n \geq 3).$$

Chaque arête (ℓ_n, ℓ_{n+1}) peut être prise comme le point de départ d'un arbre $\mathbf{R}_1^{(\ell_n, \ell_{n+1})}$, dont on note $\rho_n^{(i)}$ la n -ième ligne. Si l'on définit alors, pour tout $m \geq 1$, ν_m par :

$$\nu_m := \sum_{i=0}^{\lfloor m/2 \rfloor - 1} \rho_{m-2i}^{(i)},$$

alors le lien entre τ_{n+2} et les ν_m est identique à celui de la proposition 4. En revanche, le calcul du facteur de croissance de la suite $(S(\tau_n))_n$ est un peu plus

difficile, parce que la définition des ν_m ne permet plus d'exprimer $S(\nu_m)$ sous la forme d'une simple combinaison linéaire de suites géométriques. Néanmoins, les calculs s'adaptent et conduisent au même résultat que dans le cas où $(F_0, F_1) = (1, \varphi)$.

Le cas $\lambda = 1$ et p quelconque

Le théorème suivant figure dans [35].

Théorème 2. *Soit $p \in [0, 1]$ et soit $q := 1 - p$. Si $p < 1/4$, alors $\mathbb{E}(F_{n+1})/\mathbb{E}(F_n)$ tend vers 0. Si $p > 1/4$, alors $\mathbb{E}(F_{n+1})/\mathbb{E}(F_n)$ converge vers la valeur $\alpha(p)(1 + pq^2/\alpha(p))^3$, où $\alpha(p)$ est l'unique racine positive du polynôme $P(X) = X^4 - pX^3 - pX^2 - p^2qX - p^2q^2$. Si $p = 1/4$, alors la suite $(\mathbb{E}(F_n))_n$ est à croissance au plus linéaire.*

Notons que nous ignorons s'il est possible de réduire le degré du polynôme P pour le ramener au degré 3 comme dans le cas $p = 1/2$. (Lorsque $p = 1/2$, on a $P(X) = (X^3 - X^2 - 1/8)(X + 1/2)$.)

La démonstration de ce théorème exploite toutes les idées de celle du théorème 1. La complication supplémentaire provient de ce que $\mathbb{E}(F_n)$ n'est plus donnée par la somme des nœuds de la n -ième ligne de \mathbf{T}_1 , ces nœuds devant être pondérés par leurs probabilités. On étiquette chaque arête de \mathbf{T}_1 par la probabilité qui lui correspond : une arête étant étiquetée de la valeur x , l'arête gauche (resp. droite) qui lui succède est étiquetée de la valeur qx (resp. px). En conséquence, les ensembles comme τ_n et ρ_n ne sont plus des ensembles de paires, mais de triplets de nombres (la troisième composante correspondant à la probabilité de l'arête), et l'on s'intéresse désormais à $M(X)$, moyenne pondérée des éléments de X , et non plus à $S(X)$.

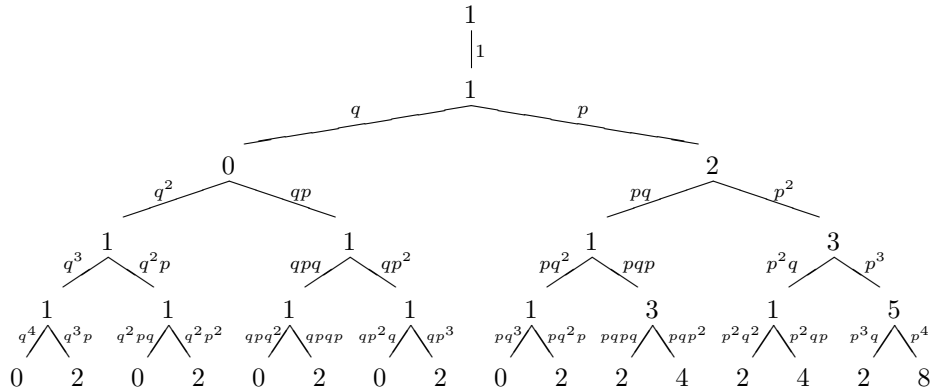


Figure 3 - L'arbre \mathbf{T}_1 pour p quelconque.

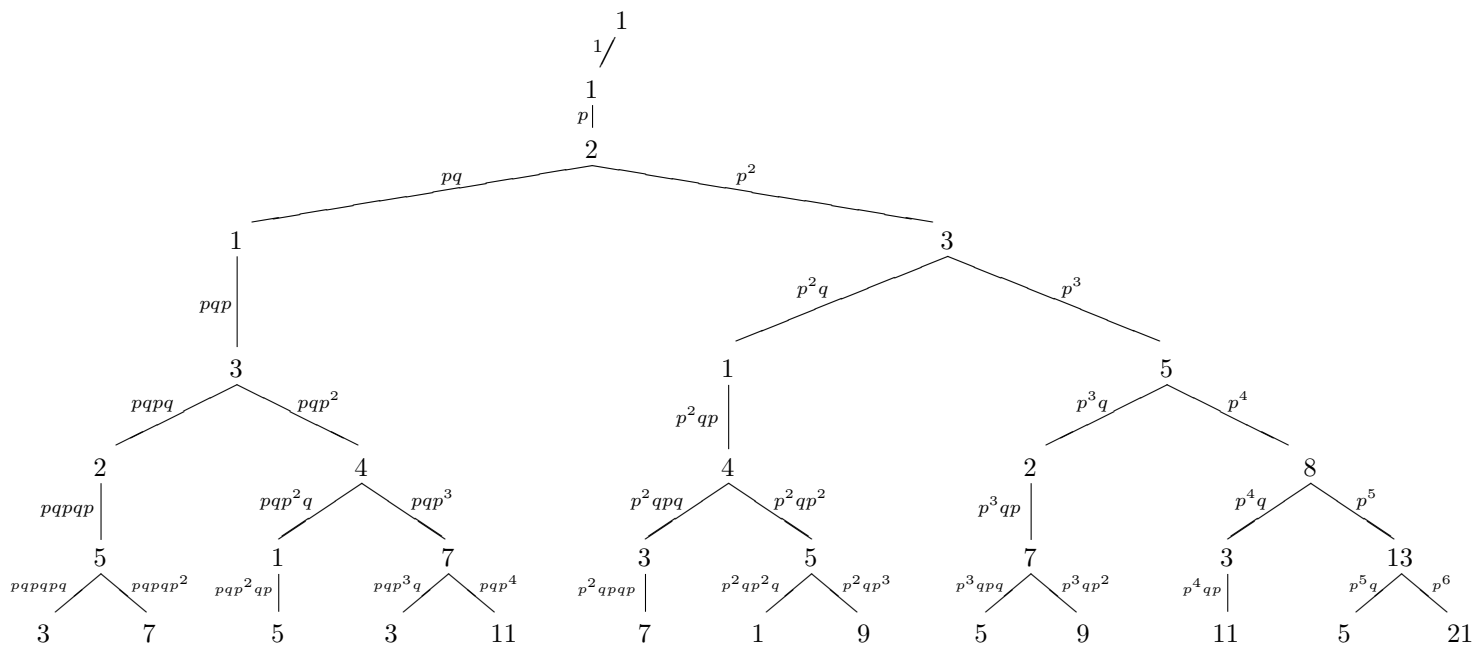


Figure 4 - L'arbre \mathbf{R}_1 pour p quelconque.

La relation donnée par la proposition 3 devient, de manière informelle, $s(\rho_n) = \rho_{n+1} + (pq^2)\rho_{n-2}$, où le facteur pq^2 ne s'applique cette fois qu'à la troisième composante de chacun des éléments de ρ_{n-2} , celle qui correspond aux probabilités affectées à ces éléments (par souci de clarté, nous nous dispensons ici d'introduire les notations ψ_n , π_n et μ_n de [35], plus rigoureuses, et qui correspondent respectivement aux τ_n , ρ_n et ν_n du cas $p = 1/2$ détaillé plus haut auxquels sont adjoint la troisième composante "probabiliste"). C'est ainsi que le formalisme mis en place dans le cas $p = 1/2$ s'étend sans grande difficulté au cas où p est quelconque. La principale modification porte sur la proposition 2 qui, outre qu'elle doit désormais impliquer la fonction M et non plus la fonction S , ne s'étend pas par une simple formule de récurrence pour la suite $(M(\rho_n))_n$; lorsque $p \neq 1/2$ en effet, il devient nécessaire d'envisager séparément les éléments de ρ_n qui correspondent à des enfants gauches (notons-les ρ_n^-) et

ceux qui correspondent à des enfants droits (ρ_n^+) . Si l'on pose, pour tout $n \geq 1$:

$$V_n := \begin{pmatrix} M(\rho_n^+) \\ M(\rho_n^-) \\ M(\rho_{n-1}^+) \\ M(\rho_{n-1}^-) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A := \begin{pmatrix} p & p & p & p^2 \\ q & 0 & -pq & -pq \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

alors la relation de récurrence qui généralise celle de la proposition 2 s'écrit

$$V_n = AV_{n-1}.$$

Le polynôme caractéristique de la matrice A n'est autre que le polynôme P de l'énoncé du théorème 2. La fin de la démonstration est alors essentiellement la même que dans le cas $p = 1/2$, qui donne le facteur de croissance cherché en fonction de l'unique racine $\alpha(p)$ de P réelle et supérieure à 1 (pour tout $p \in [0, 1]$, les trois autres sont toujours inférieures à 1 en module). La valeur critique $p = 1/4$ s'obtient en déterminant la valeur de p pour laquelle ce facteur de croissance est égal à 1.

Notons encore que, lorsque $p = 1/4$, le comportement de $\mathbb{E}(F_{n+1})/\mathbb{E}(F_n)$ dépend du choix de F_0 et F_1 . (Nous y reviendrons en sous-section 1.3.3.)

Le cas $\lambda = 2 \cos(\pi/k)$

Le théorème suivant est démontré dans [35].

Théorème 3. *Soit $p \in [0, 1]$, soit $\lambda := \lambda_k = 2 \cos(\pi/k)$ pour un certain entier $k \geq 3$. Posons $p_c := (2 - \lambda)/4$.*

- Si $p > p_c$, alors le rapport $\mathbb{E}(F_n)/\mathbb{E}(F_{n-1})$ tend vers la valeur $\alpha(p)(1 + pq^{k-1}/\alpha(p)^k)$ (qui est strictement supérieure à 1), où $\alpha(p)$ est l'unique racine positive du polynôme

$$P(X) := X^{2k} - \lambda X^{2k-1} - (2p-1)X^{2k-2} - \lambda pq^{k-1}X^{k-1} - p^2 q^{2k-2}.$$

*- Si $p = p_c$, alors la suite $(\mathbb{E}(F_n))_n$ est à croissance au plus linéaire.
- Si $p < p_c$, alors la suite $(\mathbb{E}(F_n))_n$ est bornée.*

Pour tout λ , l'arbre \mathbf{T}_λ se définit de la même manière que \mathbf{T}_1 , avec cette fois un coefficient λ dans la définition des suites de Fibonacci aléatoires, et en prenant $F_0 = 1$ et $F_1 = \lambda$. Lorsque $\lambda = \lambda_k$ pour un certain k , la définition de l'arbre restreint \mathbf{R}_{λ_k} est la même que celle de \mathbf{R}_1 , et cet arbre restreint possède des caractérisations équivalentes à celles de la proposition 1. Pour les énoncer, nous avons besoin de la définition suivante :

Définition 1. *On appelle n -ième enfant gauche dans \mathbf{T}_λ l'enfant gauche d'un $(n-1)$ -ième enfant gauche, un 0-ième enfant gauche étant, par définition, un enfant droit.*

Proposition 5. *L'arbre \mathbf{R}_{λ_k} , plus gros sous-arbre de \mathbf{T}_{λ_k} dans lequel on ne trouve jamais deux fois une même arête (a, b) , est aussi :*

- le plus gros sous-arbre de \mathbf{T}_{λ_k} qui ne contient pas de $(k-1)$ -ième enfant gauche ;

- le plus gros sous-arbre de \mathbf{T}_{λ_k} dont chaque enfant gauche a son parent b et son grand-parent a tels que $b/a \geq 1/\lambda_k$.

Par exemple, pour $k = 4$, on a $\lambda_k = \sqrt{2}$, et la structure arborescente de $\mathbf{R}_{\sqrt{2}}$ est celle du plus gros arbre binaire dans lequel il n'est pas possible de trouver une marche qui, à un moment ou à un autre, va trois fois de suite à gauche.

Le fait que les structures combinatoires du cas $\lambda = 1$ se généralisent de façon aussi naturelle au cas des (λ, p) -suites de Fibonacci aléatoires pour tout λ de la forme $\lambda_k := 2 \cos(\pi/k)$ ($k \geq 3$ entier) est un phénomène remarquable, qui montre l'existence d'un lien fort entre les suites de Fibonacci aléatoires et les *fractions continues de Rosen*, qui sont des fractions continues dont les quotients partiels sont des multiples entiers de λ_k (à k fixé). Nous reviendrons sur ces fractions continues généralisées au chapitre 2.

Une explication simple à l'apparition quelque peu inattendue de ces valeurs λ_k dans le contexte des suites de Fibonacci aléatoires est donnée par la formulation matricielle. L'introduction d'un coefficient λ dans la définition des suites de Fibonacci aléatoires revient, du point de vue matriciel, à considérer les matrices

$$R := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Le fait est que, pour tout λ de la forme $2 \cos(\theta)$, la matrice L est conjuguée à une rotation d'angle θ . Les valeurs de θ pour lesquelles θ/π est rationnel sont les seules pour lesquelles une propriété de périodicité apparaît et, parmi elles, les $\theta = \pi/k$ disposent de la propriété supplémentaire que les premières puissances successives de L sont toutes conjuguées à des rotations d'angles compris entre 0 et π , jusqu'à atteindre la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, qui, dans notre contexte, est équivalente à la matrice identité, en raison de la présence de la valeur absolue dans la définition des suites de Fibonacci aléatoires non-linéaires.

L'étroite proximité entre la structure combinatoire de \mathbf{R}_1 et celle des \mathbf{R}_{λ_k} fait que l'ensemble des outils de la démonstration du théorème 1 se généralise sans grande difficulté au cas général. Pour faire simple, plaçons-nous dans le cas où $p = 1/2$ et où les deux premiers termes de la suite de Fibonacci aléatoire sont égaux respectivement à 1 et $b := (\lambda_k + \sqrt{\lambda_k^2 + 4})/2$; un calcul montre que cette valeur pour b est la généralisation naturelle du choix $b = \varphi$ dans le cas $\lambda = 1$, qui conduit à une relation simple exprimant, pour tout n , $s(\rho_n)$ en fonction des ρ_i . Toujours pour ce choix de b , si l'on reprend les mêmes définitions de τ_n et de ρ_n que dans le cas $\lambda = 1$, on obtient les résultats suivants, qui calquent, dans l'ordre, les propositions 2, 3 et 4.

Proposition 6. *Pour tout n compris entre 3 et k , on a $S(\rho_n) = 2\lambda_k S(\rho_{n-1})$ et, pour tout $n > k$, on a*

$$S(\rho_n) = 2\lambda_k S(\rho_{n-1}) + S(\rho_{n-k}).$$

Proposition 7. *Pour tout $n < k$, on a $s(\rho_n) = \rho_{n+1}$. Par ailleurs, $s(\rho_k) = \rho_{k+1} + b^{-1}\rho_2$. Enfin, pour tout $n > k$, on a*

$$s(\rho_n) = \rho_{n+1} + \rho_{n+1-k}.$$

Proposition 8. *Définissons, pour tout $m \geq 2$, ν_m par :*

$$\nu_m := \sum_{i=0}^{\lfloor (m-2)/(k-1) \rfloor} b^{-i} \rho_{m-(k-1)i}.$$

Alors, pour tout n , on a

$$\tau_{n+2} = \sum_{m=0}^{\lfloor n/k \rfloor} \left(\binom{n}{m} - (k-1) \binom{n}{m-1} \right) \nu_{n+2-km}.$$

Remarquons, même si ce n'est pas nécessaire ici, qu'on peut interpréter les coefficients $\binom{n}{m} - (k-1)\binom{n}{m-1}$ comme étant issus d'une généralisation simple du triangle de Pascal, dont les règles sont les suivantes :

- la première colonne n'est constituée que de 1 ;
- chaque nouvelle colonne, à droite des précédentes, commence k lignes sous la précédente, par la valeur qui figure une ligne et une colonne avant elle, les valeurs suivantes de la colonne étant obtenues par l'itération de la règle classique du triangle de Pascal.

Voici par exemple le début d'un tel triangle de Pascal généralisé, dans le cas $k = 4$.

1				
1				
1				
1				
1	1			
1	2			
1	3			
1	4			
1	5	4		
1	6	9		
1	7	15		
1	8	22		
1	9	30	22	
1	10	39	52	
1	11	49	91	
1	12	60	130	
1	13	72	190	130
1	14	85	162	320
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Nous ignorons si cette propriété des coefficients $\binom{n}{m} - (k-1)\binom{n}{m-1}$ a déjà été remarquée.

La fin de la démonstration du théorème 3 est similaire à celle du théorème 2. Les expressions pq^2 y sont remplacées par pq^{k-1} , et il convient ici aussi, pour démontrer le théorème en toute généralité (et non seulement dans le cas où $(F_0, F_1) = (1, b)$) de définir ν_m à l'aide de la branche gauche de l'arbre \mathbf{T}_{λ_k} . Les raffinements techniques sont plus nombreux, mais les idées maîtresses sont les mêmes.

Signalons enfin que, dans [35], les arbres \mathbf{T}_{λ_k} et \mathbf{R}_{λ_k} sont plus simplement désignés par \mathbf{T}_k et \mathbf{R}_k . Il se trouve, comme il sera expliqué au chapitre 2, que des généralisations intéressantes des arbres restreints à d'autres valeurs de λ sont vraisemblablement possibles, ce qui nous conduit à utiliser désormais une notation valable pour toute valeur de λ .

Le cas $\lambda \geq 2$

Lorsque $\lambda \geq 2$, toute suite de Fibonacci aléatoire est strictement croissante. L'arbre restreint \mathbf{R}_λ se confond donc avec l'arbre complet \mathbf{T}_λ . Le calcul de la moyenne (pondérée) des nœuds découle alors de considérations assez simples, dont la conclusion est la suivante (voir [35]) :

Théorème 4. Soit $\lambda \geq 2$ et soit $p \in [0, 1]$. La suite $(\mathbb{E}(F_n))_n$ des valeurs moyennes des (λ, p) -suites de Fibonacci aléatoires vérifie que $\mathbb{E}(F_n)/\mathbb{E}(F_{n-1})$ tend vers la valeur $(\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4(2p - 1)})/2$.

En vue de l'étude du facteur de croissance des moyennes des (λ, p) -suites de Fibonacci aléatoires pour d'autres valeurs de λ , il est intéressant de remarquer le corollaire suivant.

Corollaire 1. Soit $p \in [0, 1]$ fixé. Si la fonction qui à tout λ associe le facteur de croissance des moyennes des (λ, p) -suites de Fibonacci aléatoires est bien définie au voisinage de 2, alors cette fonction n'est pas analytique en $\lambda = 2$.

La démonstration de ce corollaire consiste à remarquer que le comportement de la fonction à droite de 2 (donnée par le théorème 4) et celui à gauche de 2 (dédit de son expression pour les λ_k , qui forment une suite croissante vers 2) empêche la fonction d'être analytique au point $\lambda = 2$.

1.2.2 Facteur de croissance presque sûr

Le théorème suivant a été démontré dans le cas particulier $k = 3$ et $F_0 = F_1 = 1$ dans [34], puis généralisé dans [36].

Théorème 5. Quel que soit $\lambda := \lambda_k$, quels que soient $F_0 > 0$ et $F_1 > 0$, et quel que soit $p \in]0, 1]$ (cas linéaire) ou $p \in]1/k, 1]$ (cas non-linéaire), il existe une mesure ν explicite à support dans \mathbb{R}^+ telle que, pour presque toute (λ, p) -suite de Fibonacci aléatoire dont les premiers termes sont F_0 et F_1 , on a

$$\frac{1}{n} \log(|F_n|) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \gamma_{p, \lambda} := \int_0^{+\infty} \log(x) d\nu(x) > 0.$$

Bien sûr, la mesure ν n'est pas la même selon que l'on a affaire au cas linéaire ou au cas non-linéaire.

Notons en passant que, pour tout k , la valeur critique de p en-dessous de laquelle il n'y a plus croissance exponentielle presque sûre est supérieure à celle du cas en moyenne donnée par le théorème 3, conformément à ce qu'indique l'inégalité de Jensen.

La mesure ν se construit de façon explicite à l'aide de la *partition de Stern-Brocot* des réels positifs (pour une présentation de l'algorithme de Stern-Brocot, voir [30], ainsi que le chapitre 2 ci-dessous). Elle se construit de la même façon dans les cas linéaire et non-linéaire, seul le choix d'un paramètre, noté ρ , étant modifié. Ce paramètre est défini par la formule $\rho := {}^k\sqrt{1 - p_R}$, où p_R et l'unique solution x positive de l'équation

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{px}{p + (1-p)x}\right)^{k-1} = x - 1 & \text{(cas linéaire);} \\ \left(1 - \frac{px}{(1-p) + px}\right)^{k-1} = x - 1 & \text{(cas non-linéaire).} \end{cases}$$

Une version de l'algorithme de Stern-Brocot pour les λ_k est détaillée au chapitre suivant (section 2.1). Nous nous contentons ici de détailler le procédé pour $k = 3$: il consiste à partager chaque intervalle déjà construit de la forme $[a/b, c/d[$, où a, b, c et d sont des entiers tels que $ad - bc = -1$, en les deux intervalles $[a/b, u/v[$ et $[u/v, c/d[$, où $u/v = (a + c)/(b + d)$ (la *médiane* de a/b et c/d). Le premier intervalle duquel on part est $[0/1, 1/0[$, qui correspond simplement à \mathbb{R}^+ .

La construction de la mesure ν s'obtient alors en itérant le procédé suivant : à l'étape 0, l'intervalle $[0, 1, 1/0[$ est affecté d'une masse 1. Lorsqu'un intervalle de Stern-Brocot construit à l'étape n est de masse m , cette masse est partagée entre les deux sous-intervalles qui s'en déduisent à l'étape $n + 1$ selon la règle :

- si n est pair, le sous-intervalle de droite reçoit la masse $m \cdot (1/(1 + \rho))$ et celui de gauche la masse $m \cdot (\rho/(1 + \rho))$;
- si n est impair, même chose, mais en échangeant les coefficients $1/(1 + \rho)$ et $\rho/(1 + \rho)$.

Dans le cas général où k est quelconque, notons Z la valeur $1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^{k-2}$. L'algorithme de Stern-Brocot généralisé (cf. chapitre suivant, section 2.1) partage quant à lui chaque intervalle en $k - 1$ intervalles plus petits. Si un intervalle a été construit à l'étape n et est de masse m , les sous-intervalles se voient affecter, dans l'ordre, les masses $m \cdot (1/Z)$, $m \cdot (\rho/Z)$, $m \cdot (\rho^2/Z)$, \dots , $m \cdot (\rho^{k-2}/Z)$, de gauche à droite si n est impair et de droite à gauche si n est pair.

Notons que l'algorithme de Stern-Brocot, et sa généralisation au cas $k \geq 3$, définit un ensemble d'intervalles qui engendre la tribu des boréliens toute entière.

Lorsque λ est supérieur à 2, un théorème analogue peut être donné, qui cette fois donne un $\gamma_{p,\lambda}$ strictement positif quel que soit $p > 0$. Dans ce cas, la mesure ν s'obtient par un procédé explicite analogue à celui des cas précédents, mais qui n'implique pas de paramètre ρ (les masses sont réparties dans des sous-intervalles selon les coefficients p et $(1 - p)$). Le support de la mesure est un ensemble de Cantor, inclus dans l'intervalle $[(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4})/2, (3\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4})/2]$.

Le comportement d'une suite de Fibonacci aléatoire non-linéaire lorsque $p < 1/k$ dépend fortement du choix de F_0 et F_1 (voir section 1.3.3). Voici tout de même un résultat général qui n'en dépend pas (cf. [36]).

Théorème 6. *Lorsque $p \leq 1/k$, presque toute (λ_k, p) -suite de Fibonacci aléatoire non-linéaire possède une sous-suite bornée dont la densité est minorée par $(1 - kp)$.*

Ce dernier résultat est une conséquence du fait, expliqué en 1.3.3, que la "branche gauche" d'un arbre \mathbf{T}_{λ_k} est bornée.

Voici une courte présentation des idées générales de la démonstration du théorème 5.

Dans le cas non-linéaire, une (λ_k, p) -suite de Fibonacci aléatoire peut être vue comme une marche dans l'arbre \mathbf{T}_{λ_k} dans laquelle la probabilité d'aller à

droite est p et la probabilité d'aller à gauche ($1 - p$). Cette marche admet une projection dans l'arbre \mathbf{R}_{λ_k} qui s'obtient en supprimant tous les morceaux où à un pas vers la droite suivent $(k - 1)$ pas vers la gauche. Lorsque $p > 1/k$, la marche ainsi réduite est presque sûrement de longueur infinie. Par ailleurs, la probabilité qu'un pas vers la droite dans la marche initiale "survive" dans la marche réduite (c'est-à-dire ne soit pas supprimé) est donnée par la valeur p_R de l'énoncé du théorème (on l'obtient en écrivant explicitement ce qu'implique, pour la suite de la marche initiale, le fait qu'un pas à droite donné ne soit jamais supprimé).

Le résultat de la réduction d'une marche est une marche qui commence par s pas vers la gauche, suivie d'une succession infinie de blocs B_ℓ qui montrent un pas vers la droite suivi de j pas vers la gauche (avec j compris entre 0 et $k - 2$). Ces blocs forment une suite indépendante identiquement distribuée, telle que la probabilité qu'un bloc montre j pas vers la gauche est égale à ρ^j/Z . Les différents types de blocs possibles correspondent à la partition de Stern-Brocot (généralisée au cas $k \geq 3$), selon la modalité suivante : si à une marche w dans l'arbre \mathbf{R}_{λ_k} correspond un intervalle, les k sous-intervalles qui s'en déduisent correspondent aux marches bw , où b décrit les différents blocs possibles.

Le fait que ce soit en insérant un nouveau bloc comme préfixe, et non comme suffixe, que l'on reconstitue la partition de Stern-Brocot a pour conséquence que la suite de variables aléatoires $(F_n/F_{n-1})_n$ n'est pas stationnaire (même en considérant la sous-suite définie par les regroupements de la marche réduite en blocs), ce qui permettrait d'appliquer directement le théorème ergodique. Pour pouvoir le faire, l'idée consiste à plonger la marche dans \mathbf{T}_{λ_k} dans une marche bilatère, dont les indices négatifs sont construits à partir de la même loi (à droite avec probabilité p , à gauche avec probabilité $(1 - p)$). On démontre alors qu'il y a du sens à prolonger aussi la marche réduite, et que cela donne une suite biinfinie de blocs B_ℓ qui sont eux encore indépendants et identiquement distribués de même loi que plus haut.

Les valeurs de la suite de Fibonacci aléatoire biinfinie ainsi construite vérifient que, lorsque n tend vers $-\infty$, la suite des rapports converge vers une valeur limite qui, elle, peut se calculer à l'aide du théorème ergodique et donne la valeur de l'énoncé du théorème 5. Ne reste alors qu'à montrer que l'écart entre la marche unilatère et la marche dans laquelle n blocs ont été ajoutés à gauche ne croît pas trop vite avec N (plus précisément, on montre que la moyenne des N premiers écarts tend vers 0 quand N tend vers l'infini).

Dans le cas des suites de Fibonacci aléatoires linéaires, les mêmes idées fonctionnent pour l'essentiel de la même manière, la principale différence technique étant que le procédé de réduction comporte une petite complication supplémentaire : à chaque fois qu'une suppression est effectuée, le pas qui vient juste après est changé (gauche devient droite, droite devient gauche).

En ce qui concerne les variations de γ_{p,λ_k} , nous avons le résultat suivant (cf. [36]) :

Théorème 7. À $k \geq 3$ fixé, la fonction qui à p fait correspondre γ_{p,λ_k} est analytique croissante (sur $]0,1[$ dans le cas linéaire, sur $]1/k,1[$ dans le cas non-linéaire). De plus, la limite de γ_{p,λ_k} est nulle lorsque p tend vers 0 (cas linéaire) ou $1/k$ (cas non-linéaire), et est égale à $\ln((\lambda_k + \sqrt{\lambda_k^2 + 4})/2)$ lorsque p tend vers 1.

La démonstration repose sur le fait que, en gros, plus une marche (finie) dans \mathbf{T}_{λ_k} comporte de pas à gauche, plus la marche réduite correspondante dans l'arbre \mathbf{R}_{λ_k} est courte.

Signalons enfin qu'il est probable que, à p fixé, $\gamma_{p,\lambda}$ est également croissant en λ (que l'on ait $\lambda = \lambda_k$ ou $\lambda \geq 2$), comme le montrent des évaluations numériques. Nous ignorons pour l'instant comment le démontrer.

1.2.3 Propriétés des arbres restreints

Une remarque facile sur l'arbre \mathbf{R}_1 est que le nombre de nœuds sur chaque ligne est donné par la suite de Fibonacci. C'est là une conséquence élémentaire de la proposition 1, et un résultat analogue a bien entendu lieu pour les lignes de chacun des arbres \mathbf{R}_{λ_k} en vertu de la proposition 5.

L'arbre \mathbf{R}_1 , ainsi que ses généralisations de la forme \mathbf{R}_{λ_k} , dispose de propriétés qui en font un objet étroitement lié à la théorie des fractions continues. Notre premier résultat ci-dessous, démontré dans [56], indique que l'arbre \mathbf{R}_1 peut être vu comme une manière univoque de lister les rationnels.

Théorème 8. Soit (p, q) un couple d'entiers strictement positifs. Il existe une arête (p, q) dans l'arbre \mathbf{R}_1 (nécessairement unique) si, et seulement si, p et q sont premiers entre eux.

Il est facile de voir que le fait que p et q soient premiers entre eux est une condition nécessaire pour que l'arête (p, q) apparaisse dans l'arbre. Le fait qu'il s'agisse d'une condition suffisante est une conséquence d'une propriété particulière des nœuds de l'arbre \mathbf{R}_1 : dans \mathbf{R}_1 , si le nœud b a pour parent a , alors le parent de a est égal à $|b - a|$. En itérant cette propriété en partant de l'arête (p, q) , on démontre qu'on finit par atteindre l'arête $(1, 1)$: ne reste alors qu'à redescendre à partir de $(1, 1)$ en suivant la marche inverse pour montrer que l'arête (p, q) existe dans l'arbre \mathbf{R}_1 .

Le lien précis entre la fraction p/q et la marche w permettant de l'atteindre dans \mathbf{R}_1 à partir de la première arête est donné par le développement en fraction continue, selon le résultat suivant démontré dans [34].

Théorème 9. Soit une marche $w \in \{R, L\}^*$ dans \mathbf{R}_1 menant de la racine à un nœud p de parent q , la première lettre de w (correspondant au passage de la racine à son enfant) étant conventionnellement un R (et non un L). Le développement en fraction continue de p/q , noté $[a_0, a_1, \dots, a_n]$ (tous les a_i sont strictement positifs, sauf éventuellement a_0 qui peut être nul) est donné par l'application de l'algorithme suivant :

- écrire w comme une concaténation des motifs $a := R$ et $b := RL$;
- dans l’expression obtenue, regrouper par paquets les plus gros possibles les mots dans lesquels a et b alternent ;
- si c_1, \dots, c_m est la liste des cardinaux des paquets dans l’ordre de leur apparition, alors
 - $p/q = [c_m, \dots, c_1]$ si w finit par a ;
 - $p/q = [0, c_m, \dots, c_1]$ si w finit par b .

Notons que la décomposition de w sous forme d’une concaténation de a et de b existe et est unique d’après la première caractérisation de \mathbf{R}_1 donnée dans la proposition 1.

Voici un exemple d’utilisation de l’algorithme précédent. Considérons la marche $w = RRLRRRRLRL$, qui mène au nœud étiqueté 11 et de parent 15. On écrit w sous la forme $(R)(RL)(R)(R)(R)(RL)(RL)$, soit $abaaabb$. Le regroupement par alternance des a et des b donne ensuite $w = (aba)(a)(ab)(b)$. Puisque w finit par b , on obtient le développement en fraction continue $[0, 1, 2, 1, 3]$, qui est bien celui de $11/15$.

1.3 Perspectives de recherche

1.3.1 La conjecture de Zaremba

La conjecture de Zaremba énonce que, quel que soit l’entier q , il existe un entier p premier avec q tel que le développement en fraction continue usuel de p/q a tous ses quotients partiels majorés par 5. Cette conjecture peut se reformuler à partir de l’arbre \mathbf{R}_1 , de la façon suivante : désignons par \mathbf{Z}_1 le plus gros sous-arbre de \mathbf{R}_1 dans lequel on ne trouve nulle part la succession $RRLRRRLRL$ ni la succession $RLRRLLRRL$.

Proposition 9. *La conjecture de Zaremba est vraie si, et seulement si, l’ensemble des valeurs des nœuds de \mathbf{Z}_1 est l’ensemble \mathbb{N}^* tout entier.*

Cette proposition est une conséquence simple de la caractérisation du développement en fraction continue du rationnel p/q à partir de la marche dans \mathbf{R}_1 menant de la racine à l’arête (q, p) (pour p et q premiers entre eux) donnée dans le théorème 9. Nous ignorons tout à fait si ce point de vue sur la conjecture pourrait se révéler d’une efficacité réelle. Une piste serait d’étudier plus précisément les valeurs qui sont atteintes à chaque ligne de l’arbre et le nombre de fois que chacune y apparaît.

1.3.2 Pour des $\lambda < 2$ différents de ceux de Rosen

À présent que le cas $\lambda = 2 \cos(\pi/k)$ est résolu, la question se pose naturellement de comprendre ce qui se passe pour d’autres valeurs de λ . Comme nous l’avons signalé plus haut, Embree et Trefethen [25] ont montré que, quelle que soit la valeur du paramètre λ , les $(\lambda, 1/2)$ -suites de Fibonacci aléatoires

ont presque toutes un même facteur de croissance, et il serait intéressant de l'expliciter.

Le fait que nous ayons pu le faire dans le cas $\lambda = \lambda_k$ est à double tranchant : d'un côté, cela permet de mettre en évidence un lien très fort entre suites de Fibonacci aléatoires et fractions continues de Rosen. D'un autre côté, cette proximité suggère que l'étude de cas plus généraux risque de s'avérer plus ardue, à l'image de la difficulté qu'il y a à étudier les λ -fractions continues lorsque λ n'est pas de la forme $2 \cos(\pi/k)$.

Les λ_k -fractions continues peuvent se définir géométriquement à partir du groupe de transformations du demi-plan hyperbolique engendré par $z \mapsto z + \lambda_k$ et $z \mapsto -1/z$. On peut choisir comme domaine fondamental de ce groupe un polygone hyperbolique à k côtés. Ce point de vue suggère qu'une piste naturelle à suivre serait celle où λ est de la forme $2 \cos(p\pi/k)$. Cela reviendrait probablement à s'intéresser à des surfaces de Riemann avec une singularité.

Un autre point de vue, qui s'est pour l'instant révélé plus prometteur (mais qui est peut-être lié au précédent), concerne des valeurs de λ obtenues en généralisant les fractions continues de Rosen à l'instar de ce que l'on fait en définissant des bases non-entières de numération. Cette généralisation sera présentée pour elle-même au chapitre 2, nous nous contentons ici d'indiquer le principal fait dont nous disposons qui suggère que, d'une façon ou d'une autre, cette généralisation des fractions continues de Rosen pourrait avoir un impact sur l'étude des suites de Fibonacci aléatoires. (Ce qui suit fait l'objet d'un article en préparation.)

Parmi les valeurs de λ qui se prêtent à une généralisation des fractions continues de Rosen, on trouve la valeur $\lambda := 1/\sqrt{2}$ (cf. chapitre 2). Définissons l'arbre $\mathbf{R}_{1/\sqrt{2}}$ comme le plus gros sous-arbre de $\mathbf{T}_{1/\sqrt{2}}$ dont aucun nœud n'est obtenu par la formule $F_n = F_{n-2} - \lambda F_{n-1}$ (autrement dit, $\mathbf{R}_{1/\sqrt{2}}$ est le plus gros sous-arbre dans lequel le calcul des nœuds "n'a pas besoin d'utiliser la valeur absolue"). La structure combinatoire de l'arbre $\mathbf{R}_{1/\sqrt{2}}$ peut se décrire ainsi : *$\mathbf{R}_{1/\sqrt{2}}$ est le plus gros arbre binaire dans lequel toute marche est la réunion de blocs de la forme RL et RR* . Il est raisonnable de penser que le même genre de caractérisation de \mathbf{R}_λ est possible pour n'importe quelle valeur de λ parmi celles dont il est question au chapitre 2.

Malheureusement, cette généralisation des propriétés combinatoires des arbres \mathbf{R}_{λ_k} ne semble pas contenir l'information complète contenue dans \mathbf{T}_λ , du moins pas de manière aussi simple que dans le cas $\lambda = \lambda_k$. Il y a bien, certes, un équivalent de la proposition 2 ($S(\rho_{n+2}) = 3S(\rho_n)$ pour tout $n \geq 1$), mais pas d'équivalent de la proposition 3 - du moins pas d'équivalent immédiatement apparent.

1.3.3 Comportement de la branche gauche

Par branche gauche on entend la suite définie par $\ell_n = |\lambda \ell_{n-1} - \ell_{n-2}|$ pour tout $n \geq 2$, où λ est l'un des λ_k . La nécessité de comprendre quelques aspects de cette suite apparaît déjà pour étudier les facteurs de croissance en moyenne

et presque sûr, comme nous l'avons vu. Le résultat le plus précis que nous connaissons sur le sujet est le suivant, démontré dans [35] et [36].

Proposition 10. *Quel que soit $\lambda < 2$ (y compris pour λ différent des λ_k), la suite $(\ell_n)_n$ est bornée.*

La démonstration peut se faire *via* une interprétation géométrique des ℓ_n dans le plan complexe. Notons $\theta \in [0, \pi/2]$ le nombre tel que $\lambda = 2 \cos(\theta)$. Une valeur de n étant fixée, il existe une unique paire de points (P_n, P_{n+1}) du plan complexe vérifiant simultanément les conditions suivantes :

- la partie réelle de P_n est égale à ℓ_n , celle de P_{n+1} à ℓ_{n+1} ;
- l'angle orienté (OP_n, OP_{n+1}) est égal à θ ;
- les longueurs OP_n et OP_{n+1} sont égales à une même valeur r_n .

La valeur ℓ_{n+2} est alors égale à la valeur absolue de la partie réelle de l'image de P_{n+1} par la rotation de centre O et d'angle θ . Si $\lambda \ell_n - \ell_{n-1} > 0$, alors $r_{n+1} = r_n$. On itère ainsi la construction des points P_n , jusqu'à parvenir à une valeur de n pour laquelle $\ell_{n+1} = -(\lambda \ell_n - \ell_{n-1})$. Dans ce cas, une étude géométrique montre que $r_{n+1} < r_n$, et donc la suite ℓ_n est bornée.

Lorsque la suite $(\ell_n)_n$ n'est pas périodique (ce qui, dans le cas $\lambda = 1$, correspond au cas où $\ell_1/\ell_0 \notin \mathbb{Q}$), il semble possible de montrer qu'elle tend vers 0, souvent à vitesse exponentielle et dont le facteur dépend fortement de la valeur du rapport $x := \ell_1/\ell_0$. Par exemple, si l'on prend ce rapport égal à $(\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4})/2$, alors on a $\ell_{n+1} = x^{-1}\ell_n$, d'où un facteur de croissance égal à x^{-1} . Pour $x = \lambda - 2/\lambda$, on a $\ell_{2n} = x(\lambda + 1/x)\ell_{2n-1}$ et $\ell_{2n+1} = x^{-1}\ell_{2n}$, d'où un facteur de croissance asymptotique égal à $(x(\lambda + 1/x))^{-1/2}$ (pour $\lambda = 1$, ces deux exemples donnent pour facteurs $1/\varphi$ et $1/\sqrt{\varphi}$ respectivement).

Il serait intéressant d'en savoir plus sur la décroissance vers 0 de la suite $(\ell_n)_n$: est-elle exponentielle et de même facteur pour presque tout choix du rapport ℓ_1/ℓ_0 ? Si oui, comment exprimer une valeur explicite de ce facteur ?

1.3.4 Propriétés des mesures $\nu_{k,p}$

Les mesure $\nu_{k,p}$ construites pour exprimer le facteur de croissance presque sûr des (λ_k, p) -suites de Fibonacci aléatoires sont probablement toutes singulières par rapport à la mesure de Lebesgue. Elles présentent de nombreux points communs avec la mesure qui se déduit de la fonction "question mark" (notée $?$) de Minkowski. Rappelons que cette fonction fait correspondre à tout nombre x dont le développement dyadique est donné par la suite $(x_n)_n$ (avec $x_n \in \{0, 1\}$ pour tout n) le nombre $?(x)$ obtenu en descendant le long de l'arbre de Stern-Brocot selon la règle : quand $x_n = 0$, on va à gauche, quand $x_n = 1$, on va à droite. Divers outils employés pour étudier la mesure déduite de la fonction de Minkowski, comme notamment ceux donnés par Raphaël Salem dans [60], peuvent sans doute s'adapter pour les $\nu_{k,p}$. Par ailleurs, il est probable que, à λ_k fixé, la mesure d'entropie maximale pour la transformation naturellement définie par le décalage sur l'arbre de Stern-Brocot est atteinte pour l'unique valeur de $p \in [0, 1]$ telle que, notant $x := q/p$, on ait $x^k = x^{k-1} + x^{k-2} + \dots + x + 1$. Un tel

choix correspond à un arbre \mathbf{R}_{λ_k} dont les probabilités sur les arêtes s'approchent de plus en plus de probabilités uniformes sur chaque ligne.

1.3.5 Aspect matriciel

Au lieu de s'intéresser aux différentes suites de Fibonacci aléatoires possibles, on peut considérer les différentes matrices obtenues dans le produit aléatoire de n matrices parmi R et L . Cela conduit à définir des arbres dont ce sont les arêtes qui sont étiquetées, et par des matrices et non par des nombres.

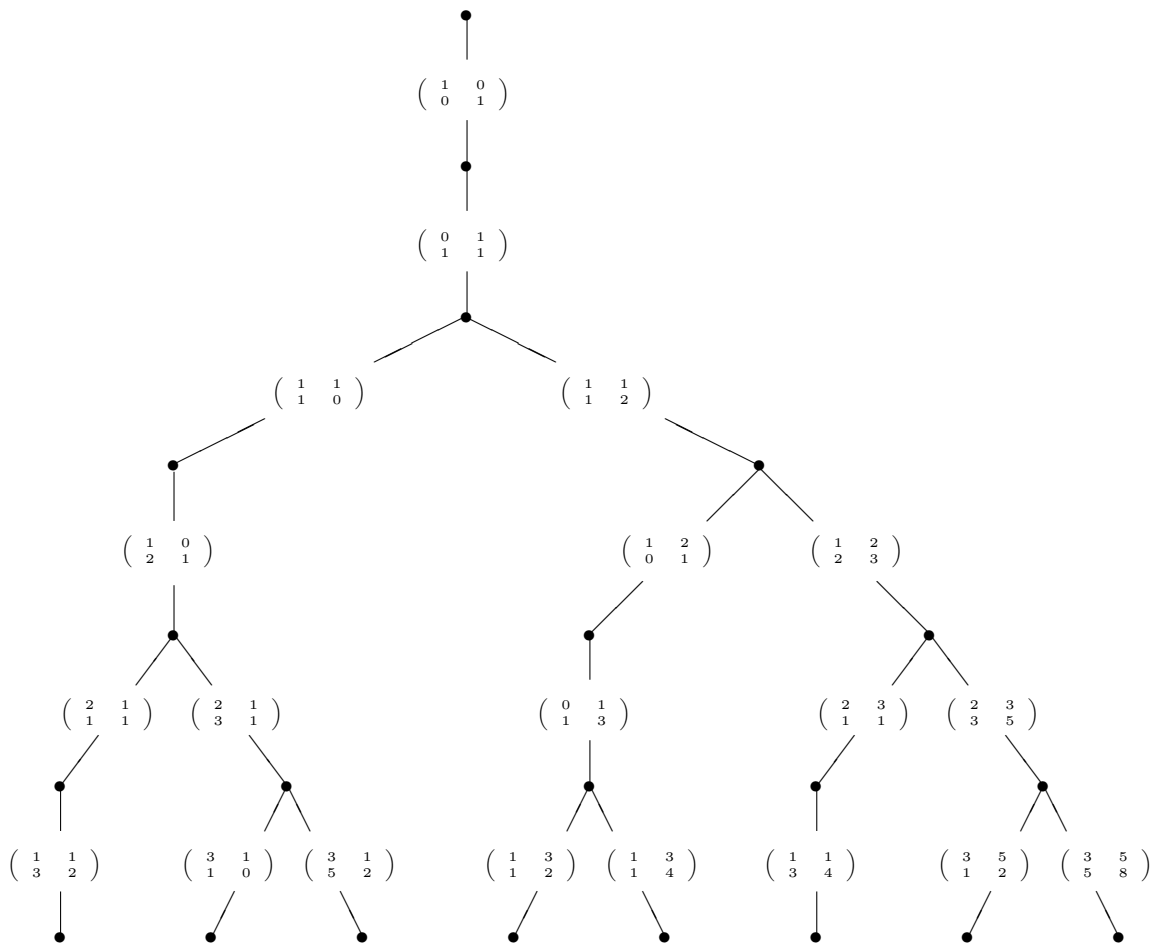


Figure 5 - L'arbre restreint des matrices.

Il est démontré dans [56] que cet arbre contient chaque matrice de $SL(2, \mathbb{N})$ une fois et une seule. En remplaçant chaque matrice par son déterminant, on

obtient des arbres dérivés dont il est possible de décrire la structure c'est-à-dire donner une règle explicite permettant de déterminer si le déterminant de telle ou telle arête est 1 ou -1 . Avec l'arbre des traces, on peut montrer que la règle équivalente n'est pas de type fini. Le même genre de choses reste à écrire pour les arbres de matrices qui correspondent au cas $\lambda = \lambda_k$.

1.3.6 Moments d'ordre supérieur

Les théorèmes 1, 2 et 3 s'intéressent au comportement asymptotique de la moyenne d'une suite de Fibonacci aléatoire. Il serait intéressant de disposer de renseignements sur les moments d'ordre supérieur. Dans [47], les auteurs établissent que, lorsque $\lambda = 1$ et $p = 1/2$, la variance croît exponentiellement avec un facteur de croissance asymptotique égal à $1 + \sqrt{5}$. Signalons que Steve Finch, de l'INRIA, a mené quelques simulations numériques de suites de Fibonacci aléatoires qui suggèrent qu'il n'est pas facile d'obtenir de façon empirique une bonne évaluation de la constante $1,13198824\dots$ calculée par Viswanath. Cela suggère que la variance augmente rapidement avec n .

1.3.7 Avec plusieurs pièces

Les outils mis en place pour démontrer les théorèmes 2 et 3 (croissance des moyennes) et les théorèmes 5 et 6 (croissance presque sûre) sont probablement suffisants pour traiter le cas plus général de suites de Fibonacci aléatoires obtenues en tirant à pile ou face alternativement avec une pièce de loi $(p, 1-p)$ et une pièce de loi $(p', 1-p')$, ou même, plus généralement, un ensemble de j pièces de monnaies utilisées de façon périodique, chacune d'elles ayant une probabilité $p_i \in [0, 1]$ de tomber sur pile. Les démonstrations nécessiteraient peut-être des raffinements techniques quelque peu encombrants, mais obtenir des énoncés (en moyenne et presque sûr) pour ce nouveau type de situation est très certainement une question de patience davantage que d'imagination.

De tels théorèmes pourraient être intéressants pour l'expression qu'ils donneraient de l'ensemble des valeurs critiques des paramètres p_j , qui partage $[0, 1]^j$ en deux zones : celle des valeurs des p_i pour lesquelles il y a croissance exponentielle et celle pour lesquelles il n'y a pas croissance.

En revanche, il est difficile de présager de la difficulté que pourrait présenter l'étude du comportement de suites de Fibonacci aléatoires définies à partir de systèmes dynamiques plus généraux, à part sans doute dans le cas de certains systèmes déterministes (*cf.* sous-section suivante).

1.3.8 “Passage à la limite” dans \mathbf{R}_1 et dynamique substitutive

La correspondance entre marches dans \mathbf{R}_1 (ou \mathbf{R}_{λ_k}) et éléments de \mathbb{Q} (ou \mathbb{Q}_{λ_k} , l'ensemble des réels admettant un développement en λ_k -fraction continue finie - *cf.* section 2.1.2) a ceci de problématique qu'au *début* de la marche correspond la *fin* du développement en fraction continue. En conséquence, à une

marche infinie dans \mathbf{R}_1 ne correspond pas, en général, un nombre irrationnel obtenu comme limite de rationnels, contrairement à ce qui se passe dans l'arbre de Stern-Brocot. Il y a cependant quelques cas où un tel passage à la limite fonctionne, l'exemple le plus simple étant celui du nombre d'or, qui correspond de manière naturelle à la marche R^∞ . Plus généralement, tout irrationnel quadratique ayant un développement en fraction continue périodique, il est possible, *via* quelques adaptations techniques mineures, de faire correspondre de manière naturelle à chacun de ces nombres-là un ensemble fini (dont le cardinal est donné par la période de la fraction continue) de marches infinies dans \mathbf{R}_1 .

Il semble difficile d'aller beaucoup plus loin dans cette direction sans devoir recourir à une définition de plus en plus lâche de la notion de "passage à la limite" dans l'arbre \mathbf{R}_1 (ou \mathbf{R}_{λ_k}). Néanmoins, il est un cas qui présente sans doute un certain intérêt : celui des irrationnels x dont la suite des quotients partiels est donnée par une substitution σ sur un alphabet fini (*cf.* [26] pour un exposé général de la théorie des substitutions). Il ne fait guère de doutes que, dans ce cas, il existe une marche infinie w dans \mathbf{R}_1 , explicite en σ et elle-même définie par une substitution sur l'alphabet $\{R, L\}$, marche qui figure en un certain sens le nombre x .

Un intérêt potentiel, plus profond, de la remarque précédente vient d'une suggestion de Jean-Paul Thouvenot (université Paris-6) qui consiste, s'agissant des suites de Fibonacci aléatoires, à s'intéresser aux suites obtenues par l'action d'un système dynamique déterministe au lieu d'un schéma de Bernoulli. Une première piste d'investigation dans ce sens est naturellement de prendre pour système une rotation irrationnelle sur le cercle, nous ramenant ainsi à la dynamique des suites sturmiennes.

Il est probable qu'obtenir une expression explicite de la bijection entre substitutions σ et marches w suggérée plus haut est facile, et qu'une expression du facteur de croissance pour ces *suites de Fibonacci substitutives* s'en déduit aisément.

1.3.9 Autres pistes

On peut, bien sûr, songer à d'autres généralisations des suites de Fibonacci aléatoires. Un exemple est le cas $\lambda = i$ (où $i^2 = -1$), qui fournit la matière à quelques observations simples. Nous ignorons également si d'autres valeurs complexes de λ pourraient se révéler intéressantes, par exemple dans le cadre des fractions continues définies sur les entiers de Gauss.

On peut aussi, pour d'autres généralisations, s'intéresser à des suites aléatoires définies à partir d'une formule de récurrence linéaire impliquant davantage de termes, comme par exemple à partir de la suite de 3-Fibonacci $F_{n+1} := F_n + F_{n-1} + F_{n-2}$ (dont l'une des possibles randomisations serait $F_{n+1} := |F_n \pm F_{n-1} \pm F_{n-2}|$). On peut concevoir que les arbres qui s'en déduisent possèdent peut-être, dans certains cas, des arbres restreints liés à une théorie des fractions continues multidimensionnelle, par exemple au travers d'un algorithme de Jacobi-Perron inversé (de même que l'arbre \mathbf{R}_1 correspond à un algorithme

de Stern-Brocot inversé). Pour avoir une chance d'aboutir, une telle tentative devrait probablement s'intéresser prioritairement à des suites dont la version matricielle donnerait à voir des matrices conjuguées à des rotations d'angles de la forme π/k (ou analogue).

Enfin, un dernier sujet d'investigation concerne les liens entre l'arbre \mathbf{R}_1 et l'arbre de *Calkin-Wilf*, introduit par Neil Calkin et Herbert Wilf dans [22]. Celui-ci consiste en un réordonnement des nœuds de l'arbre de Stern-Brocot qui permet de lister sans redondance tous les rationnels au travers d'une simple suite d'entiers dont on fait les rapports des termes successifs. Notons qu'il existe une manière simple de généraliser cet arbre dans le cadre des fractions continues de Rosen, une remarque dont, pour l'instant, nous ignorons la portée.

Chapitre 2

Fractions continues de Rosen et généralisations

Les fractions continues de Rosen ont été introduites en 1954 [59] dans le cadre de la géométrie hyperbolique. Quelques travaux sur ce sujet lié à l'étude des groupes de Hecke sont ceux de Joseph Lehner [40], de Karlheinz Gröchenig et Andrew Haas [31] et d'Andrew Haas et Caroline Series [32]. Pour un point de vue métrique, on pourra se reporter à l'article de Robert Burton, Cornelis Kraaikamp et Thomas Schmidt [21]. Citons encore l'article récent de Kraaikamp, Schmidt et Ionica Smeets [38].

David Rosen s'intéressait aux valeurs de λ pour lesquelles le sous-groupe de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ de transformations du demi-plan hyperbolique engendré par les transformations $z \mapsto -1/z$ et $z \mapsto z + \lambda$ est discret. L'ensemble de ces valeurs de λ est la réunion de deux ensembles : l'intervalle $[2, +\infty[$, qui n'est guère intéressant du point de vue de la géométrie hyperbolique (car les domaines fondamentaux de ces groupes ont des segments non-triviaux de la droite réelle dans leur bord), et l'ensemble des $\lambda_k = 2 \cos(\pi/k)$ pour k entier au moins égal à 3, qui n'est autre que celui des valeurs de λ qui définissent des suites de Fibonacci aléatoires sur lesquelles nous disposons de nombreux résultats et outils d'investigation (*cf.* chapitre 1).

Nous proposons dans le présent chapitre deux généralisations possibles des fractions continues de Rosen, qui constituent deux pistes de recherche actuellement en cours d'étude. La première concerne des valeurs de λ inférieures à 2 pour lesquelles les arbres réduits du chapitre 1 pourraient trouver une extension naturelle, la seconde concerne des valeurs de λ supérieures à 2, un cas qui semble n'avoir jamais été pris en considération jusqu'à présent.

L'ensemble de ce chapitre présente des travaux en préparation, non encore soumis pour publication.

2.1 Fractions continues de Rosen et au-delà

Cette section est partagée en deux parties. Dans la première, nous proposons un point de vue symbolique sur les fractions continues de Rosen, qui explique sans géométrie hyperbolique en quoi les valeurs $2 \cos(\pi/k)$ permettent une généralisation naturelle des fractions continues ordinaires. Pour ce que nous en savons, il semble que ce point de vue n'a jamais été présenté, même s'il est très probable qu'une analyse de certains travaux qui prennent le point de vue de la géométrie hyperbolique montrerait que ce qui suit n'est en réalité qu'une présentation alternative de choses déjà connues.

2.1.1 Symboliques croisées de la dichotomie et des fractions continues

Soit x un réel compris entre 0 et 1. Pour le localiser, l'algorithme de dichotomie part de l'intervalle $I := [0, 1]$, qu'il découpe en 2, puis encore en 2, et ainsi de suite, selon le procédé bien connu. Si, à la n -ième étape, x est dans la moitié gauche (resp. droite) de l'intervalle dans lequel on l'a localisé, alors on pose $x_n := 0$ (resp. $x_n := 1$). La dichotomie associe donc à chaque réel $x \in [0, 1]$ une suite infinie $(x_n)_n$ de 0 et de 1. (Signalons une fois pour toutes que nous ne nous intéressons pas ici aux questions d'unicité, ni à ce qui se passe lorsque x est sur le bord de l'un des intervalles - cette remarque vaut pour la dichotomie et pour tout ce qui viendra ensuite.)

Comme on le sait, la suite $(x_n)_n$ n'est pas qu'une manière symbolique de représenter x puisqu'on déduit de cette suite une expression analytique de x sous forme de développement dyadique :

$$x = \sum_{n \geq 1} \frac{x_n}{2^n}.$$

Deux choses sont à noter ici concernant la dichotomie :

- un sous-intervalle $[x, y]$ de $[0, 1]$ fait partie de la partition si, et seulement si, x et y sont dyadiques (c'est-à-dire de la forme $p/2^q$) et si $y - x$ est de la forme $1/2^n$;
- la règle de partage de chaque intervalle en deux est donnée par la moyenne arithmétique, c'est-à-dire que l'intervalle $[x, y[$ est partagé en deux sous-intervalles à l'aide du point intermédiaire $m = (x + y)/2$.

La théorie additive des fractions continues peut être considérée comme l'élaboration d'une "version hyperbolique" de l'algorithme "euclidien" de dichotomie. La dichotomie y est remplacée par l'*algorithme de Stern-Brocot* (parfois improprement attribué à Farey), dans lequel l'intervalle de départ est cette fois $[0, +\infty[$, que l'on écrit sous la forme $[0/1, 1/0[$. L'algorithme de Stern-Brocot obéit aux deux règles suivantes, qui font pendant aux deux points précédents sur la dichotomie :

- un sous-intervalle $[x, y[$ de $[0/1, 1/0[$ fait partie de la partition si, et seulement si, x et y sont rationnels et si, écrivant $x = a/b$ et $y = c/d$ (fractions irréductibles), on a $ad - bc = -1$;

- la règle de partage de chaque intervalle en deux est donnée par la *médiane*, c'est-à-dire que l'intervalle $[a/b, c/d[$ est partagé en deux sous-intervalles à l'aide du point intermédiaire $m = (a + c)/(b + d)$.

À l'instar de celle de la dichotomie, la suite $(x_n)_n$ de 0 et de 1 définie pour tout x par l'algorithme de Stern-Brocot possède une interprétation analytique, donnée par le développement en fraction continue. Plus précisément, si l'on écrit le mot infini $x_1x_2x_3\dots$ sous la forme $1^{a_0}0^{a_1}1^{a_2}0^{a_3}\dots$, où les a_n sont des entiers naturels tous non nuls sauf éventuellement a_0 , alors on a

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots}}}} =: [a_0, a_1, a_2, a_3, \dots].$$

2.1.2 Bases entières et fractions continues de Rosen

La généralisation la plus courante de l'algorithme de dichotomie consiste à partager chaque intervalle non plus en deux, mais en k intervalles égaux ($k \geq 3$, k entier), ce qui conduit à définir, pour chaque intervalle $[x, y[$, $(k - 1)$ valeurs intermédiaires, m_1, \dots, m_{k-1} , obtenues par moyennes pondérées de x et y . Plus précisément : pour tout i entre 1 et $(k - 1)$, on a $m_i = (i/k)x + ((k - i)/k)y$. À la n -ième étape, on définit x_n comme l'entier entre 0 et $(k - 1)$ codant le sous-intervalle auquel le réel x appartient. La suite $(x_n)_n$ constitue un codage symbolique du réel x qui reçoit une interprétation analytique donnée par l'écriture de x sous la forme de la série suivante :

$$x = \sum_{n \geq 1} \frac{x_n}{k^n}.$$

L'algorithme de Stern-Brocot est susceptible d'une généralisation comparable, tout le problème étant de trouver une manière adéquate de définir les $(k - 1)$ valeurs intermédiaires d'un intervalle $[x, y[$. Celle-ci consiste à demander à ces valeurs intermédiaires de disposer de deux propriétés : la première est que, si a/b et c/d sont deux valeurs consécutives parmi ces $(k - 1)$, alors $ad - bc = -1$; la seconde est qu'il existe une constante u telle que, si a/b et e/f sont les deux valeurs encadrant c/d , alors $af - be = u$ (indépendamment du choix de c/d parmi les $(k - 1)$ valeurs intermédiaires définies entre x et y).

Dans le cas du partage en trois intervalles, en partant de l'intervalle $[0/1, 1/0[$, un calcul montre que les deux seules valeurs intermédiaires vérifiant les conditions précédentes sont $1/\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}/1$ - notons que l'écriture sous forme de fraction est nécessaire ici, et qu'il n'est pas facile, pour k quelconque, de déterminer une notion simple d'"irréductibilité". Plus généralement, toujours pour $k = 3$, l'intervalle $[a/b, c/d[$ se partage en trois intervalles à l'aide des deux valeurs intermédiaires

$$\frac{a + \sqrt{2}c}{b + \sqrt{2}d} \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{2}a + c}{\sqrt{2}b + d}.$$

Ici, $\sqrt{2}$ n'est autre que λ_4 .

Pour des bases quelconques, le même procédé fonctionne, qui conduit à la proposition suivante.

Proposition 11. *Soit $[a/b, c/d]$ un intervalle tel que $ad - bc = -1$. Il existe une unique façon de le partager en k intervalles disposant des deux propriétés mentionnées ci-dessus ; ce partage utilise les $(k-1)$ points intermédiaires définis par $(\alpha_j a + \alpha_{j+1} c) / (\alpha_j b + \alpha_{j+1} d)$, où j va de 1 à $(k-1)$ et où $\alpha_j = \prod_{i=1}^{j-1} \lambda^{(i)}$, avec, pour tout i , $\lambda^{(i)} = \lambda - 1/\lambda^{(i-1)}$ (avec $\lambda^{(0)} = \lambda := \lambda_{k+1}$).*

Le codage symbolique que donne cet “algorithme de Rosen-Stern-Brocot” reçoit lui aussi une traduction analytique sous forme de développement en fraction continue, de la forme

$$x = a_0 \lambda + \frac{1}{a_1 \lambda + \frac{1}{a_2 \lambda + \frac{1}{a_3 \lambda + \frac{1}{\ddots}}}} =: [a_0, a_1, a_2, a_3, \dots]_\lambda,$$

où $\lambda := \lambda_{k+1}$. Cette fois, les a_n sont des entiers non nuls (sauf peut-être a_0) quelconques, non nécessairement positifs. La correspondance entre le codage $(x_n)_n$ et cette λ -fraction continue généralise celle du cas des fractions continues ordinaires (d'une manière que nous ne sommes pas encore parvenus à rendre aussi élégante que possible).

Les arbres \mathbf{R}_{λ_k} que nous avons construits au chapitre 1 reçoivent, à l'instar de \mathbf{R}_1 , une interprétation en termes de fractions continues de Rosen. Plus précisément, le pendant du théorème 8 est le résultat suivant.

Théorème 10. *L'ensemble des rapports a/b où (a, b) est une arête de \mathbf{R}_{λ_k} est égal à l'ensemble des réels pour lesquels il existe un λ_k -développement en fraction continue fini.*

Il est également possible de donner un équivalent du théorème 9 pour les fractions continues de Rosen, même si, là aussi, nous n'avons pas encore trouvé comment l'énoncer de manière très lisible.

Il serait intéressant de savoir dans quelle mesure le théorème 10 pourrait aider à la classification des “ λ_k -rationnels” (les nombres dont un développement en λ_k -fraction continue est fini). Actuellement, les cas connus sont $k = 3$, $k = 4$, $k = 6$, dont les λ_k -rationnels correspondants sont respectivement \mathbb{Q} , $\sqrt{2}\mathbb{Q}$, $\sqrt{3}\mathbb{Q}$, $k = 2^n + 1$, dont les λ_k rationnels sont $\mathbb{Q}(\lambda_k)$, ainsi que les cas $k = 8$, $k = 10$ et $k = 12$, dont les λ_k -rationnels sont $\lambda_k \mathbb{Q}(\lambda_k^2)$ (en-dehors des cas $k = 3, 4$ et 6 , qui sont élémentaires, ces résultats ont été obtenus dans les articles [44], [45], [17] et [18], ayant impliqué, outre David Rosen, Armin Leutbecher, Walter Borho et Gerhard Rosenberger).

Un point pour nous quelque peu mystérieux est que cette théorie additive des fractions continues de Rosen ne conduit pas à l'algorithme standard de Rosen, lequel correspond à des fractions continues "au plus proche entier" (et à leurs généralisations naturelles). Le fait que la dynamique de l'algorithme de Stern-Brocot conduit aux fractions continues ordinaires et non au plus proche entier a pour effet que les théories additives et multiplicatives des fractions continues ne coïncident pas exactement. Il ne fait guère de doute qu'il est possible de passer de l'une à l'autre, mais nous peinons à nous expliquer cet écart entre les deux théories.

2.1.3 Bases non-entières et fractions continues généralisées

Une généralisation courante des bases de numération remonte aux travaux d'Alfréd Rényi [50]. Elle consiste à écrire tout nombre x sous la forme d'une série comme

$$x = \sum_{n \geq 1} \frac{x_n}{\beta^n},$$

où $\beta > 1$ n'est pas un entier et où les x_n appartiennent à l'alphabet $\{0, 1, \dots, \lfloor \beta \rfloor\}$. Lorsque ce développement est construit à partir de l'algorithme glouton, les valeurs possibles pour les x_n sont soumises à des contraintes qui ne dépendent que des caractéristiques de β . Le cas le plus classique est celui où β est le nombre d'or : dans ce cas, l'ensemble des suites $(x_n)_n$ qui correspondent au développement glouton d'un réel en base φ est celui des mots infinis de l'alphabet $\{0, 1\}$ dans lesquels le motif 11 n'apparaît pas, en raison de la relation $\varphi^2 = \varphi^1 + \varphi^0$.

La construction de la suite symbolique $(x_n)_n$ dans le cas de la base φ peut se réaliser de la manière suivante. Partons de l'intervalle $[0, 1[$ et définissons un point intermédiaire entre 0 et 1, qui cette fois ne sera pas $1/2$ mais $1/\varphi$. (Plus généralement, pour un intervalle initial $[x, y[$, le point intermédiaire serait $(x + \varphi y)/(\varphi^2)$.) Ce point ne partage pas l'intervalle $[0, 1[$ en deux sous-intervalles de même longueur, puisque celui de droite est trop petit. Pour récupérer deux intervalles de même longueur, nous considérons que le sous-intervalle de droite n'est pas $[1/\varphi, 1[$ mais $[1/\varphi, 2/\varphi[$. Si x est dans ce sous-intervalle, alors on a $x_1 = 1$, et l'étape suivante de l'algorithme fait construire un point m entre $1/\varphi$ et $2/\varphi$ à partir duquel s'obtiennent les deux nouveaux intervalles $[1/\varphi, m[$ et $[m, 2/\varphi[$. Le choix du nombre d'or fait que cette valeur de m est précisément égale à 1, si bien qu'on a automatiquement $x_2 = 0$ et qu'aucune condition sur x_3 ne se pose désormais.

Quelle serait la version hyperbolique de cette notion de base entière ? L'idée qui nous semble la plus naturelle consiste à opérer de la manière suivante. Partant de l'intervalle initial $[0/1, 1/0[$, nous cherchons une valeur de λ qui définisse une médiane déséquilibrée dont nous tirons deux intervalles, l'un inclus dans $[0/1, 1/0[$ et l'autre débordant hors de lui de sorte que la seconde itération de l'algorithme dans cet intervalle trop gros permette de supprimer exactement le débord.

La médiane de $0/1$ et $1/0$ qui nous intéresse s'écrit $\lambda/1$. L'intervalle $[\lambda/1, 1/0[$ vérifie bien la propriété $ad - bc = -1$, mais, à moins que $\lambda = 1$, l'intervalle $[0/1, \lambda/1[$ ne la vérifie pas. Nous remplaçons alors l'extrémité $0/1$ par la valeur obtenue en appliquant formellement la proposition 11, pour trouver un second point dont l'expression est $(\lambda^2 - 1)/\lambda$. Pour $\lambda < 1$, cette quantité est négative et crée le débord attendu. L'intervalle $[(\lambda^2 - 1)/\lambda, \lambda/1[$ (resp. $[\lambda/1, 1/0[$) est l'équivalent hyperbolique de l'intervalle $[1/\varphi, 2/\varphi[$ (resp. $[0, 1/\varphi[$) du développement en base φ .

Plaçons-nous dans l'intervalle $[(\lambda^2 - 1)/\lambda, \lambda/1[$ et partageons-le à son tour selon l'algorithme : la valeur intermédiaire que nous obtenons est

$$\frac{1 \cdot (\lambda^2 - 1) + \lambda \cdot \lambda}{1 \cdot \lambda + \lambda \cdot 1} = \frac{2\lambda^2 - 1}{2\lambda}.$$

Pour que cette valeur soit égale à 0 comme voulu, il faut et il suffit que $\lambda = 1/\sqrt{2}$. Après cette nouvelle étape, donc, l'intervalle $[0/1, 1/0[$ a finalement été partitionné en deux intervalles : $[\lambda/1, 1/0[$ et $[0/\sqrt{2}, (1/\sqrt{2})/1[$, qui vérifient tous deux la propriété $ad - bc = -1$.

Outre la possibilité d'obtenir des résultats sur des (λ, p) -suites de Fibonacci aléatoires comme nous l'avons indiqué en 1.3.2, cette généralisation porte peut-être en germe la possibilité d'exprimer les réels sous la forme de fractions continues d'un genre nouveau, dont il n'est pas assuré qu'elles aient la même allure que celles de Rosen. Déduire d'une suite symbolique de 0 et de 1 construite avec $\lambda = 1/\sqrt{2}$ (ou, bien sûr, d'autres valeurs de λ manifestant le même type de propriétés) une expression analytique explicite du réel ainsi caractérisé est une piste qui nous paraît intéressante.

Enfin, ce qui précède établit (informellement) une bijection f de $]1, +\infty[$ dans $]0, 2[$ qui à toute base k de numération fait correspondre le nombre $f(k)$ pour lequel la combinatoire des codages symboliques des $f(k)$ -fractions continues est la même que celle de la base k (par exemple, les codages admissibles en base φ sont les codages de 0 et de 1 qui ne montrent jamais deux 1 successifs, ce que l'on retrouve également dans la définition précédente de l'algorithme de Stern-Brocot pour les $1/\sqrt{2}$ -fractions continues). Pour tout entier $k \geq 2$, on a $f(k) = 2 \cos(\pi/(k+1))$, et nous venons de voir que $f(\varphi) = 1/\sqrt{2}$. Un calcul montre que $f(1 + \sqrt{2}) = \sqrt{3}/2$ (ce qui correspond à des codages sur l'alphabet $\{0, 1, 2\}$ tels que chaque 2 est toujours suivi d'un 0). Il ne fait guère de doutes que f est croissante et continue. En revanche, elle n'est pas analytique (sinon, on aurait $f(\varphi) = 2 \cos(\pi/(\varphi+1))$, ce qui n'est pas le cas). Cette fonction f dispose-t-elle d'autres propriétés particulières et intéressantes ?

2.2 Sur des λ -fractions continues avec $\lambda > 2$

Lorsque $\lambda > 2$, les nombres qu'il est possible d'écrire sous forme d'un développement en λ -fraction continue forment un ensemble C_λ qui est fermé,

négligeable et non-dénombrable. Le domaine fondamental du groupe de transformations du demi-plan hyperbolique engendré par $z \mapsto -1/z$ et $z \mapsto z + \lambda$ possède deux segments de la droite réelle dans son bord, si bien que la géométrie semble n'être d'aucun secours pour étudier ces λ -fractions continues. Néanmoins, diverses propriétés intéressantes semblent pouvoir être mises au jour pour certaines valeurs particulières de λ . Notons que, pour $\lambda > 2$, le développement en λ -fraction continue est unique lorsqu'il existe.

Les λ que nous considérons ici sont les solutions positives des équations $X^2 - kX - 1 = 0$, où $k \geq 1$ est un entier. Le cas où $k = 1$ est le seul pour lequel λ est plus petit que 1 ; il correspond à $\lambda = \varphi$, qui n'est autre que λ_5 dans le cadre des fractions continues de Rosen. Nous savons ([17], [18], [44], [45]), que l'ensemble des nombres admettant un développement en φ -fraction continue fini est exactement $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

Dans la suite, nous notons φ_k la racine positive de $x^2 - kx - 1 = 0$. Notre principale conjecture est la suivante.

Conjecture 1. *Quel que soit $k \geq 2$, que que soit $x \in C_{\varphi_k}$, x admet un développement en φ_k -fraction continue fini si, et seulement si, $x \in \mathbb{Q}(\lambda_k)$.*

De nombreux essais informatiques, qui ont surtout porté sur le cas $k = 2$, nous ont persuadés de la justesse de cette conjecture. Avant d'expliquer les idées que nous avons tenté de mettre en place, jusqu'ici sans succès, pour démontrer cette conjecture, nous indiquons quelques uns des aspects intéressants des φ_k -fractions continues, ainsi que quelques conséquences de la conjecture précédente.

Dans la suite, $k \geq 2$ est fixé et nous écrivons simplement φ à la place de φ_k .

2.2.1 Propriétés des φ_k -fractions continues

De la relation $\varphi^2 - k\varphi - 1 = 0$ l'on déduit aisément que $\varphi = \overline{[k]}$. Les résultats suivants sont élémentaires (voir par exemple [33] pour un rappel des résultats de base ici utilisés sur les fractions continues) :

- les réduites de φ sont toutes de la forme p_{n+1}/p_n , où $(p_n)_{n \geq 0}$ est la suite définie par $p_0 = 1$, $p_1 = k$ et, pour tout $n \geq 1$, $p_n = kp_{n-1} + p_{n-2}$;
- pour tout $n \geq 0$, on a

$$p_n\varphi - p_{n+1} = \frac{(-1)^n}{p_n\varphi + p_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{\varphi^{n+1}}.$$

Cette dernière relation est d'ordinaire comprise comme une manière d'approcher φ par le rationnel p_n/q_n . Si nous l'interprétons comme une manière d'approcher l'entier p_{n+1} par un élément de $\varphi\mathbb{Z}$, nous obtenons que $p_n \in C_\varphi$ si, et seulement si, $p_{n-2} \in C_\varphi$. On a $p_0 = 1 \notin C_\varphi$, en revanche, $p_1 = k = \varphi + 1/(-\varphi)$, si bien que, pour tout n , $p_{2n+1} \in C_\varphi$. En particulier, nous avons démontré la proposition suivante :

Proposition 12. *Pour tout k , l'ensemble $C_{\varphi_k} \cap \mathbb{N}$ est infini.*

L'ensemble C_{φ_k} étant fermé négligeable, sa frontière est elle-même négligeable. La suite des entiers étant uniformément répartie modulo φ (puisque φ est irrationnel), un résultat classique de la théorie de l'équirépartition modulo 1 (voir par exemple [39]) donne que la fréquence de passage des entiers dans C_{φ_k} est égale à la mesure de C_{λ_k} , c'est-à-dire :

Proposition 13. *La densité dans \mathbb{N} de $C_{\varphi_k} \cap \mathbb{N}$ est nulle.*

L'ensemble $C_{\varphi_k} \cap \mathbb{N}$ est loin de se réduire aux seuls p_{2n+1} . Voici par exemple la liste des premiers éléments de $C_{\lambda_k} \cap \mathbb{N}$ pour les premières valeurs de k :

$$\begin{aligned} C_{\varphi_2} \cap \mathbb{N} &= \{0, 2, 10, 12, 14, 24, 34, 36, 46, 58, 60, 70, 72, 82, 84, 106, 142, 154, \dots\}, \\ C_{\varphi_3} \cap \mathbb{N} &= \{3, 30, 33, 36, 327, 330, 360, 363, 393, 882, \dots\}, \\ C_{\varphi_4} \cap \mathbb{N} &= \{4, 68, 72, 76, 144, 216, 432, 644, 648, 860, \dots\}. \end{aligned}$$

Des considérations d'arithmétique élémentaires permettent de montrer le résultat suivant.

Proposition 14. *Si la conjecture 1 est vraie, alors $C_{\lambda_k} \cap \mathbb{N} \subset k\mathbb{N}$ pour tout k .*

Des constructions empiriques diverses permettent de trouver de nombreuses suites d'entiers incluses dans $C_{\lambda_k} \cap \mathbb{N}$, dont le point commun est qu'elles croissent exponentiellement avec un facteur φ_k (ou l'une de ses puissances). Nous ignorons en revanche comment décrire explicitement l'ensemble $C_{\lambda_k} \cap \mathbb{N}$, nous ignorons même s'il existe une constante c telle que $\text{Card}(C_{\lambda_k} \cap \mathbb{N} \cap [0, N]) \leq c \log_{\varphi_k}(N)$ pour tout N .

La question de sous-suites polynomiales de $C_{\lambda_k} \cap \mathbb{N}$ est largement ouverte. Nous savons montrer que $C_{\lambda_2} \cap \mathbb{N}$ contient une infinité de carrés parfaits, ainsi qu'une infinité d'entiers de la forme $n^2 - 2$, mais nous ignorons la portée exacte des idées impliquées, qui se résument d'ailleurs à trouver de tels entiers de façon explicite.

Pour ce qui est des rationnels, nous avons le résultat suivant.

Proposition 15. *Si la conjecture 1 est vraie, alors, si $p/q \in C_{\varphi_k} \cap \mathbb{Q}$, on a $pq \in k\mathbb{Z}$.*

Là aussi, cette proposition découle de propriétés arithmétiques élémentaires. Plus inattendue est la proposition suivante.

Proposition 16. *Si la conjecture 1 est vraie, alors tout élément positif de $C_{\varphi_k} \cap \mathbb{Q}$ possède au moins un φ_k -quotient partiel négatif.*

La démonstration de cette proposition passe par quelques considérations sur les polynômes, un peu plus longues et techniques mais elles aussi élémentaires.

2.2.2 Quelques pistes pour la conjecture 1

Le développement d'un réel en φ -fraction continue s'effectue en appliquant un algorithme d'Euclide dans lequel chaque quotient, au lieu d'être un entier, est un élément de $\varphi\mathbb{Z}$:

$$a = (n\varphi)b + r \quad |r| \leq |b|/2.$$

L'idée la plus naturelle consiste à construire une fonction N de $\mathbb{Z}(\varphi)$ à valeurs dans \mathbb{N} et possédant une propriété de décroissance stricte (par exemple, avec les notations de la relation ci-dessus : $N(r) < N(b)$). Une possibilité dans ce sens consisterait à définir $N(x)$ comme le nombre de chiffres de l'écriture de x en base φ selon l'algorithme glouton. (Cette écriture est finie pour tout élément de $\mathbb{Z}(\varphi)$. En vertu de la relation $\varphi^2 = k\varphi + 1$, elle se caractérise par le fait que les chiffres sont tous entre 0 et k et qu'à un k ne peut suivre qu'un 0.)

C'est cette idée qu'a notamment suivi Julien Bernat dans [16] pour démontrer un résultat comparable à la conjecture 1, dans le cadre des fractions continues dont les quotients partiels sont prescrits à être des φ_1 -entiers, c'est-à-dire des éléments de $\mathbb{Z}(\sqrt{5})$ dont le développement en base φ_1 ne comporte pas de puissance négative de φ_1 . Délicate et technique, la méthode s'étend probablement à d'autres valeurs de k , mais semble requérir un travail préalable de clarification et de simplification.

Une idée qui permettrait peut-être cette clarification, et qui semble devoir être d'une certaine utilité dans la perspective d'une démonstration de la conjecture 1, consiste à définir plutôt $N(x)$ comme le produit $|x\bar{x}|$, où \bar{x} est le conjugué de x . (Le logarithme à base φ_k de cette quantité entière rend compte du nombre de chiffres de x en base φ de la même manière que le fait $\log_{10}(n)$ pour le nombre de chiffres de l'entier n écrit en base 10.) Malheureusement, cette définition ne conduit pas à une suite d'entiers décroissante, et nous ne sommes pas parvenus à trouver comment affaiblir de manière convenable cette exigence de décroissance (par exemple, à l'instar de Bernat, en autorisant une croissance limitée pour un temps fini, qui se compense nécessairement plus tard).

Représentons les éléments de $\mathbb{Z}(\varphi)$ par un réseau de \mathbb{R}^2 , à chaque nombre de la forme $\alpha + \beta\varphi$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$) correspondant le point de coordonnées (α, β) . Les lignes de niveau de la fonction $x \mapsto x\bar{x}$ sont des hyperboles d'asymptotes $y = \varphi x$ et $y = -\varphi^{-1}x$. On peut ainsi traduire l'algorithme de développement en φ -fraction continue de façon géométrique, ce qui pourrait aider à trouver une fonction à valeurs entières qui aurait la propriété voulue de décroissance au fil de l'algorithme d'Euclide donné ci-dessus. On peut notamment penser à l'angle que font les points a et b avec l'origine O , qui est, comme $N(x)$, invariant sous l'action de la multiplication par φ . Nous ignorons pour l'instant comment mettre ensemble ces pistes pour démontrer la conjecture 1.

Enfin, il est aussi fort possible qu'une lecture attentive des travaux de Borho, Borho et Rosenberger, et Leutbecher ([17], [18], [44], [45]) pour le cas $k = 1$ soit utile pour atteindre les autres cas.

Chapitre 3

Équirépartition modulo 1

Nous résumons ici les travaux parus dans [52], [53], [54] et [55].

Rappelons qu'une suite $(u_n)_n$ de réels est dite *équirépartie modulo 1* si, et seulement si, pour tout sous-intervalle I de $[0, 1]$, la fréquence empirique de passage des $\{u_n\}$ (partie fractionnaire de u_n) dans I est asymptotiquement égale à la mesure de Lebesgue de I . En d'autres termes, si l'on désigne par μ la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$, on a, pour tout intervalle $I \subset [0, 1]$:

$$\frac{\text{Card}(\{n < N : \{u_n\} \in I\})}{N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \mu(I).$$

Dans la suite, pour éviter les lourdeurs dans les notations, nous écrirons u_n plutôt que $\{u_n\}$ lorsqu'aucune confusion ne sera possible.

Un théorème classique, démontré indépendamment par Piers Bohr, Waclaw Sierpiński et surtout Hermann Weyl [70], énonce que la suite $(n\alpha)_n$ est équirépartie modulo 1 pour tout α irrationnel (voir par exemple [49], [39] ou encore [24]). En-dehors de cet exemple, divers autres types de suites ont été établies comme équiréparties modulo 1. Nous nous intéressons ici à un cas qui est à l'intersection de deux d'entre ces types : les suites oscillantes et les suites de la forme $(tu_n)_n$, où t est un paramètre prenant n'importe quelle valeur réelle hors d'un ensemble de mesure nulle.

Par *suite oscillante* on entend une suite définie par la partie fractionnaire du produit d'une suite croissante (typiquement : polynomiale ou exponentielle) par une suite définie à partir d'une fonction périodique (typiquement : une fonction trigonométrique). Un exemple simple de suite oscillante est la suite $(n \sin(n\theta))_n$, où $\theta \notin 2\pi\mathbb{Q}$. L'équirépartition modulo 1 des suites oscillantes a été initiée par Daniel Berend [12], rejoint ensuite par Grigori Kolesnik [13] puis par Michael Boshernitzan [14], [15]. Entre autres résultats, ces études ont montré que, pour tout polynôme P de degré d , toute fonction 1-périodique f de classe C^{2d+1} n'ayant, ainsi que ses premières dérivées, qu'un nombre fini de zéros, et tout

nombre irrationnel θ , la suite $(P(n)f(n\theta))_n$ est équirépartie modulo 1.

Les suites qui nous intéressent ici et dont nous savons démontrer l'équirépartition modulo 1 pour presque toute valeur de t sont des combinaisons linéaires de suites de deux types :

- $(t\lambda^n a_n)_n$, où $\lambda > 1$ et où $(a_n)_n$ est une suite bornée et minorée en module par une puissance de $1/n$;
- $(tP(n)f(n\Theta))_n$, où P est un polynôme, $\Theta \in \mathbb{R}^d$ et f une fonction \mathbb{Z}^d -périodique de classe C^2 et à valeurs dans \mathbb{R} (les hypothèses précises sur f sont plus techniques, à la fois légèrement plus contraignantes sur certains aspects et plus lâches sur d'autres).

Les articles [52] et [53] (préparés durant ma thèse de doctorat) démontrent l'équirépartition des deux types de suites précédentes, à une restriction près concernant le second : Θ doit être de *type diophantien* fini (cf. plus loin pour une définition du type diophantien). Dans [54], le résultat est généralisé pour tout Θ dans le cas de la dimension un ($d = 1$) ; enfin, dans [55], le résultat est obtenu pour tout Θ et quelle que soit la valeur de la dimension d .

Voyons les idées maîtresses qui apparaissent dans [53], qui sont également utilisées pour les cas plus généraux traités par la suite dans [54] et [55]. Un résultat classique pour étudier l'équirépartition modulo 1 de suites de la forme $(tu_n)_n$ pour presque tout t est le *lemme métrique de Koksma*, qui donne la condition suffisante suivante pour que cette "équirépartition presque partout" soit vraie :

$$\sum_{N>0} \frac{1}{N^3} \sum_{i,j<N} \min\left(1, \frac{1}{|u_i - u_j|}\right) < +\infty$$

(voir par exemple [39], chapitre 1, Theorem 4.2, ou [49], chapitre III, paragraphe 3.1).

Dans l'esprit, ce lemme indique qu'une condition suffisante pour que $(tu_n)_n$ soit presque partout équirépartie est que la suite $(u_n)_n$ croisse suffisamment vite vers $+\infty$. Lorsque u_n a la forme d'une suite oscillante, l'emploi du lemme métrique est plus difficile. L'idée générale consiste alors à estimer de façon précise le nombre de couples (i, j) pour lesquels $|u_i - u_j|$ est une valeur petite : si l'on montre que ce nombre est faible (essentiellement : de l'ordre d'une puissance de N inférieure à 2), alors le lemme métrique peut s'appliquer.

Dans le cas des suites de la forme $(t\lambda^n a_n)_n$, la vitesse de croissance du facteur λ^n est suffisamment rapide pour que l'idée précédente s'applique sans trop d'efforts. Pour une suite comme $(tu_n)_n := (tP(n)f(n\Theta))_n$ en revanche, la majoration est beaucoup plus délicate, et requiert une étude fine pourtant sur les propriétés diophantiennes de Θ .

Pour comprendre pourquoi, plaçons-nous dans un cas particulier : nous prenons $P(n) = n$ et $d = 1$ (c'est-à-dire que Θ est un réel et f est une fonction réelle 1-périodique). Fixons la valeur de N et de i dans la somme précédente, et intéressons-nous à l'ensemble E_i des valeurs de $j \in [N^a, N[$ pour lesquelles

la différence $|u_i - u_j|$ est inférieure à N^a , où $a \in [0, 1[$ est une constante quelconque. Si nous montrons que le cardinal de E_i est majoré par une puissance de N inférieure à 1 (indépendante de i et de N), alors le lemme métrique peut s'appliquer.

Soit j un élément de E_i . On a alors :

$$f(j\Theta) \in \left[\frac{if(i\Theta) - N^a}{j}, \frac{if(i\Theta) + N^a}{j} \right].$$

Pour séparer les problèmes, imaginons dans un premier temps que l'intervalle de droite ne dépende pas de j , et notons-le provisoirement $I_{i,N}$ pour cette raison. Remarquons, ce qui nous servira plus loin, que la mesure de $I_{i,N}$ est majorée par une puissance négative de N .

Toute la question est de compter le nombre de j entre N^a et N pour lesquels $f(j\Theta)$ tombe dans cet intervalle. Puisque f est \mathbb{Z}^d -périodique et assez régulière, il n'est pas difficile d'établir que l'ordre de grandeur du cardinal cherché peut se majorer à partir de la *discrédance* de la suite $(n\Theta)_n$. D'une manière générale, la discrédance $D_N((u_n)_n)$ d'une suite de réels (entre 0 et 1) se définit par :

$$D_N((u_n)_n) = \sup_{I \in \mathcal{I}} \left(\left| \frac{\text{Card}(\{n < N : u_n \in I\})}{N} - \mu(I) \right| \right),$$

où \mathcal{I} est l'ensemble des intervalles de $[0, 1]$.

Pour évaluer la discrédance de la suite $(n\Theta)_n$, on utilise le *type diophantien* de Θ , qui quantifie la qualité des approximations rationnelles possibles de Θ . Plus précisément, le type diophantien de l'irrationnel Θ est l'infimum des valeurs η pour lesquelles il existe une infinité de couples d'entiers (p, q) premiers entre eux vérifiant que

$$|q\Theta - p| \leq \frac{1}{q^\eta}.$$

S'il n'existe aucune valeur de η vérifiant la propriété précédente, Θ est alors dit de type diophantien infini.

Le principe des tiroirs permet de démontrer que tout irrationnel est de type diophantien au moins 1 ; par ailleurs, on démontre que presque tout irrationnel est de type diophantien 1.

Le lien entre discrédance de $(n\Theta)_n$ et type diophantien η de Θ est donné par la relation suivante (voir par exemple [39]) : pour tout $\varepsilon > 0$ et tout N assez grand, $D_N((n\Theta)_n) \leq N^{\varepsilon-1/\eta}$. De cette inégalité l'on déduit aisément que, sous réserve que Θ soit de type diophantien fini, le nombre de $j < N$ pour lesquels $\{j\Theta\}$ (et donc aussi $f(j\Theta)$, en vertu des hypothèses de régularité faites sur f) appartient à un intervalle $I_{i,N}$ dont la mesure est majorée par une puissance négative de N est un nombre majoré par une puissance de N inférieure à 1. En conséquence, il devient possible d'appliquer le lemme métrique de Koksma pour conclure - du moins dans le cas $d = 1$ et $\eta < +\infty$, et dans la mesure où nous parvenons à éclaircir ce qui se passe lorsque nous tenons compte du fait qu'en

réalité $I_{i,N}$ n'est pas indépendant de j (en particulier, on doit donc plutôt le noter $I_{i,j,N}$).

Pour résoudre le problème posé par ce dernier point, l'idée consiste à remarquer que les intervalles $I_{i,j,N}$ se déplacent lentement avec j . Aussi est-il possible de trouver une valeur $a' < 1$ telle que la réunion des $I_{i,j,N}$ pour $N^{a'}$ valeurs successives de j donne un intervalle dont la mesure est une puissance de N inférieure à a' . Ajoutons que le fait de remplacer dans u_n la valeur n par un polynôme $P(n)$ quelconque ne change pas fondamentalement ce qui précède, les arguments d'estimation polynomiale demeurant essentiellement les mêmes. Enfin, considérer des combinaisons linéaires de suites de la forme $(tP(n)f(n\Theta))_n$ ne modifie pas davantage les raisonnements précédents, les termes de degrés plus petits pouvant sans difficulté être "absorbés" par le N^a qui figure dans la définition de $I_{i,j,N}$.

En dimension $d > 1$, ce qui précède fonctionne à peu près de la même manière, mais la définition du type diophantien est un peu plus délicate. Plutôt que de s'intéresser aux approximations de Θ par des vecteurs à coordonnées rationnelles, elle consiste à approcher Θ par des hyperplans rationnels. Plus précisément, le type diophantien de $\Theta \in \mathbb{R}^d$ est l'infimum des réels η pour lesquels il existe une infinité de vecteurs $h = (h_1, \dots, h_d) \in \mathbb{Z}^d$ avec $\text{pgcd}(h_1, \dots, h_d) = 1$ et pour lesquels

$$\{(h, \Theta)\} \leq \frac{1}{r(h)^\eta},$$

où (\cdot, \cdot) désigne le produit scalaire usuel et où $r(h) := \prod_i \max(1, |h_i|)$.

Là encore, on écrit $\eta = +\infty$ lorsqu'aucun réel η ne permet d'avoir la relation précédente pour une infinité de $h \in \mathbb{Z}^d$.

De même qu'en dimension 1, on a $\eta \geq 1$ pour tout $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_d)$ tel que $1, \theta_1, \dots, \theta_d$ sont linéairement indépendants sur \mathbb{Q} . De plus, presque tout $\Theta \in \mathbb{R}^d$ est de type diophantien 1.

En dimension d , la discrétion $D_N((u_n)_n)$ d'une suite $(u_n)_n$ de $[0, 1]^d$ se définit par :

$$D_N((u_n)_n) := \sup_{P \in \mathcal{P}} \left(\left| \frac{\text{Card}(\{n < N : u_n \in P\})}{N} - \mu(P) \right| \right),$$

où \mathcal{P} désigne l'ensemble des pavés de $[0, 1]^d$ (c'est-à-dire des ensembles de la forme $I_1 \times \dots \times I_d$, où les I_k sont des intervalles) et où μ est la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]^d$.

Le lien entre type diophantien et discrétion devient, en dimension d , que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout N assez grand, on a $D_N((n\Theta)_n) \leq N^{\varepsilon-1/(d\eta-d+1)}$. Ainsi, lorsque Θ est de type diophantien fini, les mêmes arguments qu'en dimension 1 peuvent être employés, à une difficulté supplémentaire près qui tient à l'allure des lignes de niveau de f . En dimension 1, une ligne de niveau de f est, pour l'essentiel, donnée par une réunion finie de points, si bien que l'ensemble des éléments x de $[0, 1]$ pour lesquels $f(x)$ est comprise entre deux valeurs

est une réunion finie d'intervalles et, sur chacun d'eux, la discrédance fournit les majorations nécessaires. En dimension plus grande en revanche, l'image réciproque par f d'un intervalle n'est qu'exceptionnellement un élément de \mathcal{P} , si bien qu'il est nécessaire d'introduire une notion de discrédance un peu plus générale, définie par un supremum qui porte sur des ensembles qui contiennent les images réciproques par f des intervalles. Cette nouvelle notion de discrédance est liée à la précédente par une relation de dépendance polynomiale, comme on le démontre à l'aide d'idées analogues à celles qui lient la discrédance D_N à la *discrédance isotropique* J_N (dont le supremum est défini sur les convexes).

Les conclusions précédentes, annoncées dans [52] et publiées dans [53], ont pour cas particulier le résultat suivant :

Théorème 11. *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_d(\mathbb{Z})$, soit ϕ une forme linéaire de $\mathcal{M}_d(\mathbb{Z})$. Pour presque tout réel t , la suite $(t\phi(A^n))_n$ possède une répartition asymptotique modulo 1 explicite.*

(Par répartition asymptotique nous entendons une équirépartition selon une mesure μ qui n'est pas nécessairement la mesure de Lebesgue.)

Ce résultat, qui figure sous une forme partielle dans un article d'Emmanuel Lesigne [42], se démontre facilement à partir de la décomposition de Jordan de la matrice A et des résultats précédents d'équirépartition. Il a pour corollaire le théorème suivant de convergence ponctuelle de moyennes ergodiques non conventionnelles :

Théorème 12. *Soient A_1, \dots, A_p des matrices de $\mathcal{M}_d(\mathbb{Z})$ et soient f_1, \dots, f_p des fonctions de $L^p(\mathbb{T}^d)$. Les moyennes*

$$\frac{1}{N} \sum_{n < N} f_1(A_1^n x) \cdots f_p(A_p^n x)$$

forment une suite convergente pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$.

Le lien entre les matrices de ces deux théorèmes et les suites oscillantes considérées plus haut est le suivant : Θ est le vecteur composé des arguments des valeurs propres de module 1 associées à des blocs de Jordan non-triviaux. Ce sont ces blocs de Jordan qui, lorsque les matrices sont élevées à la puissance n , font apparaître des suites à croissance polynomiale (la fonction f , quant à elle, est une combinaison linéaire de fonctions trigonométriques). Par ailleurs, connaître la répartition modulo 1 pour presque tout réel t d'une suite de la forme $(t\lambda^n a_n)_n$ où $\lambda > 1$ permet, dans les théorèmes 11 et 12, de traiter les valeurs propres de module plus grand que 1.

Le théorème 12 s'obtient en démontrant qu'il suffit de considérer des fonctions d'un sous-espace dense de L^2 , *via* un raisonnement impliquant l'emploi d'une inégalité maximale (*cf.* par exemple [29]); il suffit alors d'appliquer le théorème 11 aux fonctions de l'espace engendré par les caractères.

Quant à la démonstration du théorème 11, outre les résultats d'équirépartition précédents, elle utilise un résultat profond d'Alan Baker [10] sur les formes

linéaires en logarithmes, qui indique en particulier que le vecteur formé des arguments des valeurs propres de module 1 d'une matrice de $\mathcal{M}_d(\mathbb{Z})$ est toujours de type diophantien fini.

Pour éviter d'être contraint d'invoquer cet important résultat de Baker, mais aussi pour obtenir un énoncé plus général portant sur toutes les matrices de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, il est logique de tenter de supprimer l'hypothèse faite sur le type diophantien de Θ . Voici d'abord les idées de base pour traiter le problème en dimension 1, selon la méthode publiée dans [54].

Comme nous l'avons dit, quel que soit le nombre irrationnel Θ , la suite $(n\Theta)_n$ est équirépartie modulo 1. La discrédance des N premiers termes de cette suite tend donc vers 0 (les deux propriétés sont en effet équivalentes), sans pour autant constituer une suite décroissante. Grossièrement, on peut dire que la valeur $D_N((n\Theta)_n)$ oscille entre N^{-1} et $N^{-1/\eta}$, la première valeur étant atteinte lorsque N est de l'ordre du dénominateur q d'une bonne approximation rationnelle p/q de Θ , la seconde lorsque N en est loin.

Lorsque $\eta = +\infty$, il n'y a pas de minoration polynomiale de la vitesse à laquelle la discrédance tend vers 0. Dans ce cas, l'idée consiste à étudier séparément les valeurs de N pour lesquelles la discrédance est faible (c'est-à-dire majoré par une puissance négative de N) et les autres. Pour les premières, l'argument utilisé dans le cas d'un Θ de type diophantien fini peut être employé tel quel. Pour les secondes, il convient de remarquer qu'elles correspondent à des "temps" de la suite $(n\Theta)_n$ pour lesquels le nombre Θ se comporte pratiquement comme un rationnel dont le dénominateur est petit devant N . Les valeurs $f(n\Theta)$ pour $n < N$ ont donc pour l'essentiel un comportement de suite périodique. Or, même si le lemme métrique de Koksma ne s'applique pas dans ce cas, il est facile de montrer que, pour presque tout réel t , une suite de la forme $(tP(n)a_n)_n$ avec $(a_n)_n$ périodique (jamais nulle) est équirépartie modulo 1 (c'est là une conséquence simple du théorème de Weyl mentionné plus haut et de sa généralisation aux suites de la forme $(tP(n))_n$).

Cette séparation des temps où le comportement est "quasi-périodique" et de ceux où il est "quasi-diophantien" ne permet malheureusement pas de reouvrir toutes les valeurs de N . Pour certaines de ces valeurs, aucun des deux arguments ne peut être employé, et des artifices techniques complémentaires sont nécessaires.

Lorsque l'on passe à la dimension d quelconque (traitée dans [55]), les difficultés techniques se font plus nombreuses. La première d'entre elles est que le partage, même imparfait, entre temps quasi-périodiques et temps quasi-diophantiens ne fonctionne plus. Il y a bien, certes, des valeurs de N pour lesquelles la discrédance de la suite $(n\Theta)_n$ est majorée par une puissance de N convenable. En revanche, rien ne peut jamais garantir qu'aux autres valeurs de N peut correspondre une propriété de quasi-périodicité, dans la mesure où le type diophantien en dimension d ne s'intéresse pas à des approximations par des vecteurs de \mathbb{Z}^d (ce qui donnerait effectivement un comportement presque périodique), mais par des hyperplans rationnels. En d'autres termes, le comportement extrême qui

fait face au comportement diophantien est celui dans lequel la suite $(n\Theta)_n$ est bien approchée par une suite appartenant à un hyperplan rationnel de \mathbb{R}^d . Il convient alors de raisonner par récurrence pour faire diminuer la dimension de cet hyperplan, jusqu'à atteindre le cas d'un hyperplan de dimension 1 sur lequel peut être utilisé l'argument de quasi-périodicité.

La dimension d pose d'autres difficultés, notamment celle du nombre de composantes connexes des ensembles de la forme $H \cap f^{-1}(I)$ où I est un intervalle et H un hyperplan.

L'énoncé général d'équirépartition modulo 1 pour presque tout réel t des combinaisons linéaires de suites de la forme $(tP(n)f(n\Theta))_n$ permet de généraliser le théorème 12 au cas de matrices à coefficients réels quelconques (voir [55]) :

Théorème 13. *Soient A_1, \dots, A_p des matrices de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ et soient f_1, \dots, f_p des fonctions de $L^p(\mathbb{T}^d)$. Les moyennes*

$$\frac{1}{N} \sum_{n < N} f_1(A_1^n x) \cdots f_p(A_p^n x)$$

forment une suite convergente pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$.

Notons encore que les travaux d'Ivan Vinogradov ([67], page 124) sur les sommes trigonométriques et la discrédance de suites polynomiales permettent d'étendre le théorème 12 aux moyennes dans lesquelles les A_i^n sont remplacées par $A_i^{P_i(n)}$, où les P_i sont des polynômes à coefficients entiers. Il est probable que cette dernière généralisation s'étend elle aussi au cas de matrices A_i à coefficients réels (et non seulement entiers), et que les méthodes présentées ci-dessus permettent de le faire. Toutefois, une transposition directe de ces méthodes conduirait sans doute à une démonstration d'une technicité particulièrement aride, si bien que l'on peut juger souhaitable, avant de s'y lancer, que soit au préalable effectué un travail de simplification et de clarification des démonstrations des résultats précédents.

Chapitre 4

Autres travaux

4.1 Équation de Markoff et généralisations

Nous résumons ici le travail paru dans [5] et celui soumis dans [6]. Il se fonde sur des résultats obtenus par Ryuji Abe [2] et Abe et Aitchison [3], [4]. Deux ouvrages de références sur le sujet sont ceux de Thomas Cusick et Mary Flahive [23] et celui de Serge Perrine [48].

Désignons par K (resp. par K') la partie discrète du spectre de Markoff pour \mathbb{Q} (resp. $\mathbb{Q}(i)$), c'est-à-dire l'ensemble des minima des forme quadratiques indéfinies à coefficients réels (resp. complexes) et de déterminant 1. Un lien explicite existe entre les éléments de K et les entiers apparaissant dans des *triplets de Markoff*, c'est-à-dire des triplets d'entiers (p, q, r) vérifiant l'équation diophantienne $p^2 + q^2 + r^2 = 3pqr$. Une façon de lister tous les triplets de Markoff consiste à construire un arbre binaire complet, dit *arbre de Markoff*, composé de triplets de matrices. Le triplet de la racine est (N_1, N_2, N_5) , avec

$$N_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad N_2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad N_5 = \begin{pmatrix} 13 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ce triplet est considéré comme *de type I*. Les enfants d'un triplet (N, N', N'') sont construits de la manière suivante :

- si (N, N', N'') est de type *I*, alors son enfant gauche est (N, N'', NN'') et de type *I*, et son enfant droit est $(N', N'', N''N')$ et de type *II* ;
- si (N, N', N'') est de type *II*, alors son enfant gauche est $(N, N'', N''N)$ et de type *II*, et son enfant droit est $(N', N'', N'N'')$ et de type *I*.

En remplaçant, dans chaque triplet, chaque matrice par son coefficient inférieur gauche, on obtient un arbre qui contient tous les triplets de Markoff.

L. Vulakh [69], puis Asmus Schmidt [61], ont montré que, pour décrire la partie discrète du spectre de Markoff pour $\mathbb{Q}(i)$, il convenait de s'intéresser au système d'équations diophantiennes

$$(*) \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 & = 2y_1y_2 \\ 2x_1x_2 & = y_1^2 + y_2^2 \end{cases} .$$

Ce système est lui-même relié de façon naturelle à l'équation de Markoff, *via* l'une de ses solutions non-entières qui est $(2\sqrt{2}/3, 2\sqrt{2}/3, 4/3)$. Il est démontré dans [3] et [4] qu'un équivalent de l'arbre binaire précédent, dit *Arbre de Vulakh-Schmidt*, joue pour le système (*) un rôle équivalent à celui de l'arbre précédent pour les triplets de Markoff. Cet arbre est cette fois ternaire complet, et est constitué de quadruplets de matrices $(\Lambda, \Lambda'; M, M')$, où Λ et Λ' appartiennent à $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ et M et M' à $\text{PSL}(2, \mathbb{Z}/\sqrt{2})$ (tous les coefficients sont de la forme $k/\sqrt{2}$, avec k entier impair).

Il est connu (voir [23]) que le développement en fraction continue de toute matrice de l'arbre de Markoff (c'est-à-dire sa décomposition canonique en produit des deux générateurs de $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ que sont $U := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $V := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$) dispose de la propriété de n'avoir, à part à la fin, que des 1 et des 2 comme quotients partiels (les puissances de U qui apparaissent dans sa décomposition) et que ceux-ci possèdent une propriété de palindromie. Plus précisément, la décomposition d'une matrice N est toujours de la forme $211\sigma 20$, où σ est un mot palindromique. Dans [5] est démontré l'équivalent de ce phénomène dans le cadre de l'arbre de Vulakh-Schmidt.

Théorème 14. *Le développement en fraction continue d'une matrice Λ d'un quadruplet de l'arbre de Vulakh-Schmidt est (sauf pour quelques cas particuliers faciles à décrire par ailleurs) de la forme $112\sigma 32$, où σ est un mot palindromique de l'alphabet à trois lettres $\{1, 2, 3\}$.*

Un problème intéressant, aussi bien dans le cadre de Markoff que dans celui de Vulakh-Schmidt, est celui de déterminer explicitement la marche dans l'arbre permettant d'atteindre un triplet (ou un quadruplet) donné. Deux stratégies peuvent être employées :

- la première consiste à s'intéresser aux *coordonnées de Frobenius* (dans le cas Markoff) (u, v) d'une matrice N de l'arbre, qui indiquent le nombre u (resp. v) de fois que N_1 (resp. N_2) apparaît dans l'expression de N comme produit de N_1 et N_2 (cela revient à considérer l'abélianisé du groupe $\langle N_1, N_2 \rangle$), et à trouver une généralisation convenable de ces coordonnées dans le cas Vulakh-Schmidt ;
- la seconde consiste à étudier les propriétés combinatoires de la partie palindromique σ des matrices N (ou Λ).

La synthèse de ces deux stratégies, dans les cas Markoff et Vulakh-Schmidt, est donnée dans [6]. Dans le cas Markoff, la première stratégie consiste à utiliser le développement en fraction continue usuel de u/v , et à reconstruire la marche à partir de lui. Le procédé, qui relève de la théorie additive des fractions continues (c'est-à-dire de l'algorithme de Stern-Brocot), figure déjà plus ou moins

implicitement dans divers travaux antérieurs de différents auteurs. Dans le cas Vulakh-Schmidt, une conjugaison convenable permet de définir l'équivalent de coordonnées de Frobenius pour les matrices M et M' . Pour reconstituer la marche dans l'arbre menant à un quadruplet contenant une matrice M de coordonnées (u, v) , la technique consiste à considérer le développement en 2-fraction continue de u/v , c'est-à-dire celui (unique) dans lequel les quotients partiels sont tous pairs. Un tel développement est possible dans la mesure où les coordonnées (u, v) de toute matrice M vérifient que l'une des deux (et l'une des deux seulement) est paire (c'est une condition nécessaire et suffisante pour que u/v admette un développement en 2-fraction continue).

Dans le cas Markoff, la seconde stratégie utilise une propriété remarquable des codages sturmiens de rationnels, codages auxquels se ramènent les parties palindromiques σ : *il existe une manière et une seule d'écrire σ sous la forme $\sigma'12\sigma''$ avec σ' et σ'' palindromiques*. Cette propriété est héréditaire, au sens où, lorsqu'elle est vraie pour σ elle l'est automatiquement pour σ' et σ'' . Cette décomposition permet, de proche en proche, de reconstituer les ancêtres successifs d'un triplet. Dans le cas Vulakh-Schmidt, un phénomène comparable est à l'œuvre, qui permet de décomposer σ sous la forme $\sigma'\sigma''\sigma''$, avec σ' et σ'' palindromiques.

4.2 Réduites d'un quadratique et schémas numériques

Nous résumons ici les résultats qui figurent dans [57].

Pour déterminer numériquement les racines d'une équation réelle $f(x) = 0$, trois techniques figurent parmi les plus classiques.

La première, dont la vitesse de convergence est linéaire, est la *méthode de la fausse position* : une estimation par défaut a et une estimation par excès b étant connues (convenons par exemple que $f(a) < 0 < f(b)$), on obtient une troisième estimation c en considérant l'intersection avec l'axe des abscisses de la droite passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. Selon le signe de $f(c)$, on remplace a ou b par c (si $f(c) < 0$ on remplace a par c , sinon on remplace b par c), et on recommence avec les deux nouvelles estimations par défaut et par excès.

La seconde, dont l'ordre de convergence est φ (le nombre d'or) est la *méthode de la sécante*, qui consiste, x_{n-1} et x_n étant les deux dernières approximations connues de x , à définir x_{n+1} comme l'intersection avec l'axe des abscisses de la droite passant par $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ et $(x_n, f(x_n))$.

La troisième, dont la vitesse de convergence est quadratique, est la *méthode de Newton*. Dans celle-ci, une approximation x_n étant donnée, on construit x_{n+1} comme intersection avec l'axe des abscisses de la tangente au graphe de f passant par le point $(x_n, f(x_n))$.

Lorsque f est un polynôme à coefficients entiers et que les approximations

initiales de x sont des rationnels, la suite des approximations obtenues par l'une ou l'autre de ces méthodes est une suite de rationnels. Il est donc naturel de se demander si cette suite de rationnels est liée à celle des réduites du nombre x . En 1847, Joseph-Alfred Serret [62] a démontré que, pour $f(x) = x^2 - c$ avec $c \in \mathbb{N}$, c non carré parfait, la méthode de Newton appliquée à partir de $x_0 = \lfloor \sqrt{c} \rfloor$ donne, pour tout n , $x_n = p_{2^n-1}/q_{2^n-1}$, où p_i/q_i est la i -ième réduite de \sqrt{c} . Le fait que nous obtenions ainsi une sous-suite de réduites dont l'indice croît à chaque étape d'un facteur 2 fait écho à la vitesse quadratique de convergence de la méthode de Newton.

Que devient ce résultat lorsqu'on utilise la méthode de la sécante ou celle de la fausse position à la place de celle de Newton? Les résultats suivants montrent que, pour une large classe d'irrationnels quadratiques, le même genre de propriété est vrai.

Théorème 15. *Soit α un irrationnel quadratique de polynôme minimal $f(X) = aX^2 + bX + c$, où a, b et c sont des entiers tels que $a > 0$, $b \in a\mathbb{Z}$ et $2a < \sqrt{b^2 - 4ac}$. Désignons par $(p_n/q_n)_n$ la suite des réduites de α . S'il existe deux entiers u et v tels que $au^2 + buv + cv^2 = \pm 1$, alors il existe deux rationnels x_0 et x_1 explicites tels que la méthode de la sécante appliquée à f à partir de ces deux valeurs donne, pour tout n , que $x_n = p_{\phi(n)}/q_{\phi(n)}$, où $(\phi(n))_n$ est une suite qui vérifie que, pour tout $n \geq 2$:*

$$\phi(n) = \phi(n-1) + \phi(n-2) + z_n,$$

où $(z_n)_n$ est une suite périodique.

La suite "quasi-Fibonacci" obtenue d'indices est à son tour un écho à l'ordre de convergence de la méthode de la sécante.

Dans tous les exemples que nous avons testés, on a en fait que $(z_n)_n$ est la suite constante égale à 1. Nous savons le démontrer pour certaines classes particulières de quadratiques (celles pour lesquelles il est facile d'exprimer les numérateurs et les dénominateurs des réduites à l'aide de puissances d'un irrationnel), mais pas dans le cas général.

Les hypothèses qui portent sur les coefficients du polynôme f sont nécessaires ; des contre-exemples existent au théorème 15 si l'une ou l'autre de ces hypothèses est supprimée. Seule, l'hypothèse $2a < \sqrt{b^2 - 4ac}$ peut être supprimée, au prix d'un affaiblissement partiel de la conclusion.

Enfin, un énoncé analogue peut être donné pour la variante de la méthode de la sécante consistant à définir x_n comme l'intersection avec l'axe des abscisses de la droite passant par les points $(x_{n-s}, f(x_{n-s}))$ et $(x_{n-t}, f(x_{n-t}))$ (où s et t sont deux entiers distincts fixés). La suite $(\phi(n))_n$ vérifie alors la relation de récurrence $\phi(n) = \phi(n-s) + \phi(n-t) + z_n$.

Pour la méthode de la fausse position, que l'on peut voir dans le cas où f est quadratique comme un cas limite des généralisations précédentes de la méthode de la sécante (avec $s = 1$ et $t = +\infty$), un résultat comparable s'énonce ainsi.

Théorème 16. *Soit α une racine du polynôme $f(X) := aX^2 + bX + c$, où a, b et c sont des entiers sans diviseurs communs. S'il existe des entiers u et v tels que $au^2 + buv + cv^2 = \pm 1$ et une réduite u_1/v_1 de α telle que $2|au_1^2 + bu_1v_1 + cv_1^2| \leq |a|\sqrt{b^2 - 4ac}$, alors la sous-suite d'indices pairs de la suite $(x_n)_n$ obtenue par itération de la méthode de la fausse position à partir des valeurs $x_0 := u/v$ et $x_1 := u_1/v_1$ est une sous-suite arithmétique de réduites de α .*

Il est possible de donner quelques variantes de cet énoncé, notamment pour mettre en scène la sous-suite $(x_{2n+1})_n$ (ou les deux sous-suites). Il est également possible d'explicitier la raison de la suite arithmétique des indices. En revanche, les hypothèses techniques sur u, v, u_1 et v_1 ne peuvent pas être significativement affaiblies, des contre-exemples pouvant être produits lorsque ces hypothèses sont supprimées.

Pour la méthode de Newton, nous n'avons pas tenté de généraliser le résultat de Serret mentionné plus haut, mais de généraliser des travaux de Georg Rieger [51], Takao Komatsu [37] et Edward Burger [20], pour obtenir le résultat suivant.

Théorème 17. *Pour tout irrationnel quadratique α , il existe un rationnel x_0 (explicite) et une fonction f essentiellement unique (elle aussi explicite) pour laquelle l'application de la méthode de Newton à f avec x_0 comme valeur initiale produit une sous-suite arithmétique de réduites de α dont la raison est égale à la période du développement en fraction continue de α .*

L'existence se montre en résolvant une simple équation différentielle. L'unicité "essentielle" concerne une hypothèse raisonnable sur la fonction f et qui consiste à demander que sa dérivée logarithmique soit continue en α et analytique à droite et à gauche de α .

Par exemple, pour le nombre d'or φ , en appliquant la méthode de Newton à partir de $x_0 := 1$ à la fonction

$$f(x) := |x - \varphi|^{(5+\sqrt{5})/10} \cdot |x + \varphi^{-1}|^{(5-\sqrt{5})/10},$$

on obtient la suite de toutes les réduites de φ .

4.3 La disjonction faible

La notion de disjonction faible a été introduite dans [43]. Elle constitue une notion plus "faible" que celle de disjonction introduite par Harry Furstenberg [28]. Rappelons, en ce qui concerne cette dernière, que deux systèmes dynamiques probabilisés, (X, \mathcal{A}, μ, T) et (Y, \mathcal{B}, ν, S) sont dits *disjoints* lorsque la seule mesure sur l'espace produit invariante par la transformation $T \times S$ dont les marginales sur X et Y sont invariantes par l'action de T et S respectivement est la mesure produit $\mu \otimes \nu$.

Deux systèmes sont dits *faiblement disjoints* si, quelles que soient $f \in L^2(\mu)$ et $g \in L^2(\nu)$, il existe $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}$ tels que $\mu(A) = \nu(B) = 1$ et tels que la

suite de moyennes

$$\frac{1}{N} \sum_{n < N} f(T^n x) g(S^n y)$$

converge pour tout $(x, y) \in A \times B$.

L'origine de cette définition est l'étude des moyennes ergodiques non conventionnelles où $x = y$ (pour $X = Y$). Il est clair que la convergence ponctuelle des moyennes précédentes sur un pavé de mesure 1 implique la convergence ponctuelle sur la diagonale. La disjonction faible de deux systèmes constitue donc une condition suffisante pour garantir la convergence presque sûre des moyennes ergodiques le long de la diagonale. Ces moyennes diagonales sont aussi celles auxquelles nous avons eu affaire au chapitre 3 dans le cas particulier des transformations du tore.

La dénomination de disjonction faible, quant à elle, provient de ce que toute paire de systèmes disjoints est aussi une paire de systèmes faiblement disjoints. La démonstration, facile, de ce résultat s'appuie sur un énoncé donné par Furstenberg [28] sur les couples de points génériques dans les systèmes disjoints.

Le fait que la disjonction implique la disjonction faible permet d'emblée de donner plusieurs exemples de systèmes faiblement disjoints : lorsque T est d'entropie nulle et S un K -automorphisme (cf. [66]), ou lorsque T est faiblement mélangeante et S une transformation de Weyl, ou encore lorsque T est minimale et continue et que S a toutes ses puissances ergodiques et que la réunion des points fixes pour chaque puissance de S forme un ensemble dense (cf. [28]) (par exemple, un endomorphisme ergodique du tore \mathbb{T}^d). En revanche, deux systèmes d'entropie positive ne peuvent jamais être faiblement disjoints : cela résulte d'une part d'un théorème de Yakov Sinai (voir [63]) qui énonce que tout système d'entropie h admet tout schéma de Bernoulli d'entropie $h' \leq h$ comme facteur, d'autre part du critère selon lequel deux systèmes ne peuvent être faiblement disjoints si, pour deux fonctions f et g fixées, l'ensemble des couples (x, y) pour lesquels les moyennes précédentes divergent contient le graphe d'une application absolument continue.

Il est facile de trouver des exemples de transformations qui ne sont pas faiblement disjointes d'elles-mêmes, ne serait-ce qu'une transformation d'entropie positive, d'après ce qui précède. Notamment, il existe des systèmes (explicites) mélangeants et de rang 1 qui ne sont pas faiblement disjoints d'eux-mêmes, ainsi que des systèmes faiblement mélangeants, rigides et de rang 1 qui ne le sont pas non plus.

Plus intéressant est qu'il existe des systèmes faiblement disjoints d'eux-mêmes. Les exemples connus de tels systèmes regroupent la classique transformation de Chacón, les systèmes à spectre quasi-discret, ou encore les systèmes ergodiques unipotents. Une propriété est qu'un tel système faiblement disjoint de lui-même, s'il est en outre ergodique et simple, est nécessairement *universel*, c'est-à-dire faiblement disjoint de n'importe quel autre système.

4.4 Une inégalité de Koksma dans $O(1/n)$

Nous indiquons ici le contenu de la note [58] (soumise pour publication).

Soit f une fonction de $[0, 1]$ à valeurs dans \mathbb{R} à variations bornées, de variation totale $V(f)$. Soit $(x_n)_{0 \leq n < N}$ une suite finie d'éléments de $[0, 1]$. On appelle **-discrépance* de $(x_n)_n$ la valeur $D_N^*((x_n)_n)$ définie par :

$$D_N^*((x_n)_n) = \sup_{0 < \alpha \leq 1} \left(\left| \frac{\text{Card}(\{n < N : x_n \in [0, \alpha]\})}{N} - \alpha \right| \right).$$

Une inégalité classique de Koksma (voir par exemple [39]) quantifie l'écart maximum entre l'intégrale de f et la moyenne de f sur les x_n :

$$\left| \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{N} \sum_{n < N} f(x_n) \right| \leq V(f) \cdot D_N^*((x_n)_n).$$

Cette inégalité se généralise en dimension supérieure (inégalité de Koksma-Hlawka), mais au prix d'une définition de la variation totale plus délicate à manier.

Lorsque f appartient à d'autres espaces fonctionnels que celui des fonctions à variations bornées, on peut utiliser d'autres quantification de la répartition des x_n pour obtenir une majoration de l'écart entre son intégrale et la moyenne finie. Notre résultat, qui se démontre en appliquant l'identité de Parseval, concerne l'ensemble $O(1/n)$ des fonctions de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} dont la suite des coefficients de Fourier décroît au moins aussi vite que la suite des $1/n$ (*i.e.* $f \in O(1/n)$ ssi il existe une constante $c = c(f)$ telle que, pour tout entier n , on a $|n\hat{f}(n)| \leq c$). Cet ensemble est muni de la norme

$$\|f\|_{O(1/n)} := \|f\|_1 + \sup_n (|n\hat{f}(n)|),$$

qui en fait un espace de Banach [1].

Pour toute suite finie $(x_n)_{0 \leq n < N}$, on désigne par $D_N^{L^2}((x_n)_n)$ la *discrépance* L^2 de $(x_n)_n$, définie par :

$$D_N^{L^2}((x_n)_n) := \left(\int_0^1 \left| \frac{\text{Card}(\{n < N : x_n \in [0, t]\})}{N} - t \right|^2 dt \right)^{1/2}. \quad (4.1)$$

Théorème 18. – Soit $f \in O(1/n)$, soit $(x_n)_{0 \leq n < N}$ une suite finie dans $[0, 1]$. À une constante multiplicative près, on a l'inégalité suivante :

$$\left\| \frac{1}{N} \sum_{n < N} f(\cdot + x_n) - \int_0^1 f(t) dt \right\|_2 \leq D_N^{L^2}((x_n)_n) \cdot \|f\|_{O(1/n)}. \quad (4.2)$$

Ce résultat simplifie et étend un résultat publié par Jon Aaronson, Mariusz Lemańczyk, Christian Mauduit et Hitoshi Nakada dans [1], qui donne une majoration à partir d'un facteur plus compliqué à définir que la discrédance L^2 et ne fonctionne que dans le cas d'une rotation en dimension 1. Dans ce cas d'une rotation sur le cercle, la discrédance L^2 est une quantité bornée avec N , ce qui permet de retrouver le résultat suivant, donné par Mariusz Lemańczyk (voir [1] et [41]).

Théorème 19. *Soit T une rotation du tore de dimension 1 définie par un angle irrationnel. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de $O(1/n)$. Le flot spécial de base T au-dessous de f n'est pas mélangeant.*

Mentionnons pour finir une possible piste d'étude, concernant un objet qui n'a semble-t-il jamais été étudié et qui pourrait peut-être se révéler de quelque utilité en théorie ergodique : la *discrédance de transformations*. Soit T une transformation de $[0, 1]$ préservant la mesure de Lebesgue. À tout élément ω de $[0, 1]$ on peut faire correspondre la valeur $D_N^*(T)(\omega) := D_N^*((T^n\omega)_{n < N})$. En intégrant cette fonction, on obtient une valeur $D_N^*(T)$, discrédance de la transformation T , dont le comportement asymptotique est lié aux propriétés dynamiques de T . En particulier, nous savons démontrer que T est ergodique si, et seulement si, $D_N^*(T)$ tend vers 0 quand N tend vers l'infini. Pour certaines transformations, il est facile d'étudier le comportement de $D_N^*(T)$. En particulier, il est facile de relier la discrédance d'une rotation d'angle α au type diophantien de α (qui quantifie la qualité avec laquelle il est possible d'approcher α par des rationnels). Il se peut que des calculs explicites soient également possibles pour des échanges de 3 intervalles.

Bibliographie

- [1] Jon AARONSON, Mariusz LEMAŃCZYK, Christian MAUDUIT & Hitoshi NAKADA, “Koksma’s Inequality and Group Extensions of Kronecker Transformations”, in : Y. Takahashi (Ed.), *Algorithms, Fractals and Dynamics*, 27-50, Plenum Press, 1995.
- [2] Ruyji ABE, “Algorithmic construction of Cohn-Markoff matrices” (soumis).
- [3] Ruyji ABE & I. AITCHISON, “Geometry of Markoff spectrum for $\mathbb{Q}(i)$, I”, <http://www.lmpt.univ-tours.fr/~ryuji>
- [4] Ruyji ABE & I. AITCHISON, “Another sequence in Markoff spectrum” (soumis).
- [5] Ruyji ABE & Benoît RITTAUD, “Quasi-palindromy of elements of $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ associated to the Markoff spectrum”, *WORDS 2007, Proceedings of the 6th International Conference on Words* (Pierre ARNOUX, Nicolas BÉDARIDE & Julien CASSEIGNE édés.), 7-17, Institut de Mathématiques de Luminy (2007).
- [6] Ruyji ABE & Benoît RITTAUD, “Combinatorics of words of Markoff spectra” (soumis).
- [7] Jean-Paul ALLOUCHE, Klaus SCHEICHER & Robert TICHY, “Regular maps in generalized number systems”, *Mathematica Slovaca* **50**, 41-58 (2000).
- [8] Jean-Paul ALLOUCHE & Jeffrey SHALLIT, “The ring of k -regular sequences”, *Theoretical Computer Science* **98**, 163-197 (1992).
- [9] Jean-Paul ALLOUCHE & Jeffrey SHALLIT, “The ring of k -regular sequences, II”, *Theoretical Computer Science* **307**, 3-29 (2003).
- [10] Alan BAKER, *Transcendental Number Theory*, Cambridge University Press (1975).
- [11] Eli BEN-NAIM & Paul KRAPIVSKY, “Weak Disorder in Fibonacci Sequences”, *Journal of Physics A* **39**, n°20, L301-L307 (2006).
- [12] Daniel BEREND “A recurrence property of smooth functions”, *Israel Journal of Mathematics* **62**, n°1, 32-36 (1988).
- [13] Daniel BEREND & Grigori KOLESNIK “Distribution modulo 1 of some oscillating sequences, *Israel Journal of Mathematics* **71**, n°2, 161-179 (1990).

- [14] Daniel BEREND, Michael BOSHERNITZAN & Grigori KOLESNIK, “Distribution modulo 1 of some oscillating sequences. II”, *Israel Journal of Mathematics* **92**, n°1-3, 125-147 (1995).
- [15] Daniel BEREND, Michael BOSHERNITZAN & Grigori KOLESNIK, “Distribution modulo 1 of some oscillating sequences. III”, *Acta Mathematica Hungarica* **95**, n°1-2, 1-20 (2002).
- [16] Julien BERNAT, “Continued fractions and numeration in the Fibonacci base”, *Discrete Mathematics* **306**, n°22, 2828-2850 (2006).
- [17] Walter BORHO, “Kettenbrüche in Galoisfeld”, *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg* **39**, 76-82 (1973).
- [18] Walter BORHO & Gerhard ROSENBERGER, “Eine Bemerkung zur Hecke-Gruppe $G(\lambda)$ ”, *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg* **39**, 83-87 (1973).
- [19] Philippe BOUGEROL & Jean LACROIX, *Products of random matrices with applications to Schrödinger operators*, Progress in Probability and Statistics, vol. 8, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA (1985).
- [20] Edward BURGER, “On Newton’s method and rational approximations to quadratic irrationals”, *Canadian Mathematical Bulletin* **47**, 12-16 (2004).
- [21] Robert BURTON, Cornelis KRAAIKAMP & Thomas SCHMIDT, “Natural extensions for the Rosen fractions”, *Transactions of the American Mathematical Society* **352**, n°3, 1277-1298 (2000).
- [22] Neil CALKIN & Herbert WILF, “Recounting the rationals”, *American Mathematical Monthly* **107**, n°4, 360-363 (2000).
- [23] Thomas CUSICK & Mary FLAHOVE, *The Markoff and Lagrange spectra*, Mathematical Surveys and Monographs 30, AMS, Providence, RI (1989).
- [24] Michael DRMOTA & Robert TICHY, *Sequences, discrepancies and applications*, Springer-Verlag, 1997.
- [25] Mark EMBREE & Lloyd TREFETHEN, “Growth and decay of random Fibonacci sequences”, *Proceedings of the Royal Society London A* **455**, 2471-2485 (1999).
- [26] Pytheas FOGG, *Substitutions in Dynamics, Arithmetics and Combinatorics*, Springer, 2002.
- [27] Harry FURSTENBERG, “Noncommuting random products”, *Transactions of the American Mathematical Society* **108**, 377-428 (1963).
- [28] Harry FURSTENBERG, “Disjointness in Ergodic Theory, Minimal Sets and a Problem in Diophantine Approximation”, *Mathematical System Theory* **1**, 1-49 (1967).
- [29] Adriano GARSIA *Topics in almost everywhere convergence*, Markham Publishing Company (1970).
- [30] Ronald GRAHAM, Donald KNUTH & Oren PATASHNIK, *Concrete mathematics. A foundation for computer science*, Addison-Wesley (1989).

- [31] Karlheinz GRÖCHENIG & Andrew HAAS, “Backward continued fractions, Hecke groups and invariant measures for transformations of the interval”, *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **16**, n°6, 1241-1274 (1996).
- [32] Andrew HAAS & Caroline SERIES, “The Hurwitz constant and Diophantine approximation on Hecke groups”, *Journal of the London Mathematical Society* **34**, n°2, 219-234 (1986).
- [33] Godfrey HARDY & Edward WRIGHT, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford University Press (1960).
- [34] Élise JANVRESSE, Benoît RITTAUD & Thierry DE LA RUE, “How do random Fibonacci sequences grow?” *Probability Theory and Related Fields* (à paraître).
- [35] Élise JANVRESSE, Benoît RITTAUD & Thierry DE LA RUE, “Growth rate of the expected value of a generalized random Fibonacci sequence” (soumis).
- [36] Élise JANVRESSE, Benoît RITTAUD & Thierry DE LA RUE, “Almost-sure growth rate of generalized random Fibonacci sequences” (soumis).
- [37] Takao KOMATSU, “Continued fractions and Newton’s approximations, II”, *Fibonacci Quarterly* **39**, 336-338 (2001).
- [38] Cornelis KRAAIKAMP, Thomas SCHMIDT & Ionica SMEETS, “Tong’s spectrum for Rosen continued fractions”, *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux* **19**, n°3, 641-661 (2007).
- [39] Lauwerens KUIPERS & Harald NIEDERREITER, *Uniform distribution of sequences*, Wiley-Interscience (1974).
- [40] Joseph LEHNER, “Diophantine approximation on Hecke groups”, *Glasgow Mathematical Journal* **27**, 117-127 (1985).
- [41] Mariusz LEMAŃCZYK, “Sur l’absence de mélange pour des flots spéciaux au-dessus d’une rotation irrationnelle”, *Colloquium Mathematicum* **84/85** part 1, 29-41 (2000).
- [42] Emmanuel LESIGNE, “Loi des grands nombres pour des sommes de Riesz-Raïkov multidimensionnelles”, *Compositio Mathematica* **110**, 39-49 (1998).
- [43] Emmanuel LESIGNE, Benoît RITTAUD & Thierry DE LA RUE, “Weak disjointness of measure-preserving dynamical systems”, *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **23** n°4, 1173-1198 (2003).
- [44] Armin LEUTBECHER, “Über die Heckeschen Gruppen $G(\lambda)$ ”, *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg* **31**, 199-205 (1967).
- [45] Armin LEUTBECHER, “Über die Heckeschen Gruppen $G(\lambda)$ II”, *Mathematische Annalen* **211**, 63-86 (1974).
- [46] Édouard LUCAS, *Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise et sur diverses questions d’arithmétique supérieure*, Imprimerie des sciences mathématiques et physiques (1877).
- [47] Eran MAKOVER & Jeffrey MCGOWAN, “An elementary proof that random Fibonacci sequences grow exponentially”, *Journal of Number Theory* **121**, 40-44 (2006).

- [48] Serge PERRINE *La Théorie de Markoff et ses développements*, Tessier & Ashpool, Chantilly, France (2002).
- [49] Gérard RAUZY *Propriétés statistiques de suites arithmétiques*, Presses Universitaires de France (1976).
- [50] Alfréd RÉNYI, “Representations for real numbers and their ergodic properties”, *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **11**, 401-416 (1957).
- [51] Georg RIEGER, “The golden section and Newton approximation”, *Fibonacci Quarterly* **37**, 178-179 (1999).
- [52] Benoît RITTAUD, “Équidistribution presque partout modulo 1 de suites oscillantes”, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris Série I - Mathématiques* **327**, n°4, 339-342 (1998).
- [53] Benoît RITTAUD, “Équidistribution presque partout modulo 1 de suites oscillantes perturbées”, *Bulletin de la Société Mathématique de France* **128**, n°3, 451-471 (2000).
- [54] Benoît RITTAUD, “Équidistribution presque partout modulo 1 de suites oscillantes perturbées - II - Cas liouvillien unidimensionnel”, *Colloquium Mathematicum* **96**, n°1, 55-73 (2003).
- [55] Benoît RITTAUD, “Équidistribution presque partout modulo 1 de suites oscillantes perturbées - III - Cas liouvillien multidimensionnel”, *Journal of Number Theory* **122**, n°2, 261-282 (2007).
- [56] Benoît RITTAUD, “On the average growth of random Fibonacci sequences”, *Journal of Integer Sequences* **10**, Article 07.2.4 (2007).
- [57] Benoît RITTAUD, “On subsequences of convergents to a quadratic irrational given by some numeric schemes” (soumis).
- [58] Benoît RITTAUD, “A Koksma’s inequality in $O(1/n)$ and a consequence for the mixing property of special flows” (soumis).
- [59] David ROSEN, “A class of continued fractions associated with certain properly discontinuous groups”, *Duke Mathematical Journal* **21**, 549-563 (1954).
- [60] Raphaël SALEM, “On some singular monotonic functions which are strictly increasing”, *Transactions of the American Mathematical Society* **53**, 427-439 (1943).
- [61] Asmus SCHMIDT, “Diophantine approximation of complex numbers”, *Acta Mathematica* **134**, 1-85 (1975).
- [62] Joseph-Alfred SERRET, “Sur le développement en fraction continue de la racine carrée d’un nombre entier”, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* **XII**, 518-520 (1836).
- [63] Paul SHIELDS, *The Theory of Bernoulli shifts*, University of Chicago Press (1973).
- [64] Clement SIRE & Paul KRAPIVSKY, “Random Fibonacci sequences”, *Journal of Physics A* **34**, n°42, 9065-9083 (2001).

- [65] Neil SLOANE, *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, <http://www.research.att.com/~njas/sequences>
- [66] Jean-Paul THOUVENOT, “Some properties and applications of joinings in ergodic theory”, in *Ergodic Theory and its Connections with Harmonic Analysis*, London Mathematical Society, Lecture note Series 205, Cambridge University Press.
- [67] Ivan VINOGRADOV, *The Method of Trigonometrical Sums in the Theory of Numbers*, Interscience (non daté).
- [68] Divakar VISWANATH, “Random Fibonacci sequences and the number 1.13198824...”, *Mathematics of Computation* **69**, n°231, 1131-1155 (2000).
- [69] L. VULAKH, “The Markoff spectrum of imaginary quadratic $\mathbb{Q}(i\sqrt{D})$, where $D \equiv 3 \pmod{4}$ ” (en russe), *Vestnik Moskow University Series 1* **26**, 32-41 (1971).
- [70] Hermann WEYL, “Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins”, *Mathematische Annalen* **77**, 313-352 (1916).