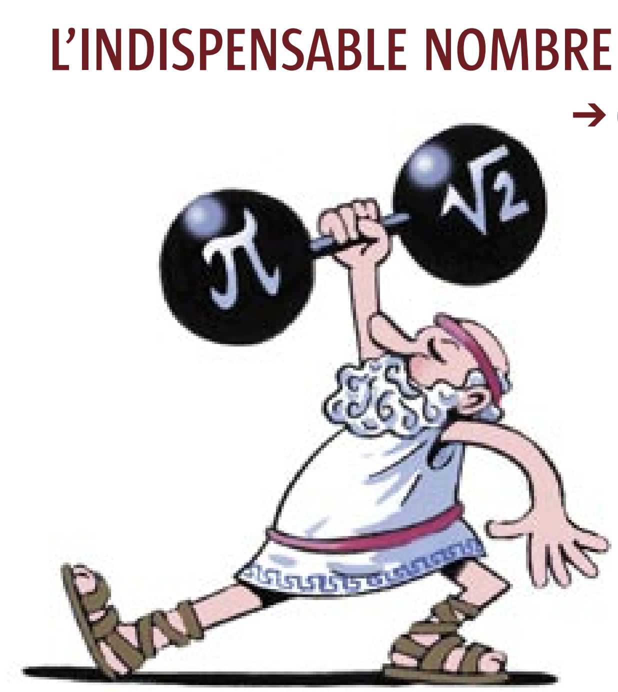
π = 3,1415... Quoi de plus banal que ce nombre π, rapport de la circonférence et du diamètre de tout cercle ? Pourquoi s'intéresser encore aujourd'hui à un nombre que l'on étudie depuis l'Antiquité ? N'a-t-on pas tout découvert et redécouvert mille fois à son sujet ? Et pourtant, π ne cesse de fasciner le mathématicien, l'artiste et le profane. Parce qu'il est l'incontestable figure de proue du monde mystérieux des constantes mathématiques, ces nombres qui semblent surgir de nulle part et que l'on rencontre, immuables, plus souvent qu'à leur tour. Dans ce dossier, consacré à π et aux constantes, émergent de véritables objets de science et d'actualité.

L'indispensable nombre π

EN DEUX MOTS

Les décimales de π sont-elles réparties de façon totalement aléatoire ? Pour le savoir, une solution : en calculer le plus possible. C'est ce à quoi se sont employés de nombreux mathématiciens depuis Archimède. L'arrivée de l'ordinateur a permis de pulvériser tous les records. De façon inattendue, comme à l'époque d'Archimède, ces calculs nécessitent aujourd'hui la connaissance très précise de √2, autre nombre irrationnel, dont le calcul des décimales, quoique plus aisé, a toujours été considéré comme moins intéressant.

√2 à la rescousse des décimales



π est le nombre irrationnel dont on connaît le plus grand nombre de décimales : plus de mille milliards. Mais les mathématiciens ne battraient pas ce type de record s'ils ne s'intéressaient pas tout autant à un nombre moins prestigieux : √2.

Benoît Rittaud
est maître de conférences à l'université Paris-XIII. Cet article est un extrait, adapté par la rédaction de *La Recherche,* de son livre *Le Fabuleux Destin de √2* qui sera publié en mars 2006 aux éditions Le Pommier.
rittaud@math.univ-paris13.fr

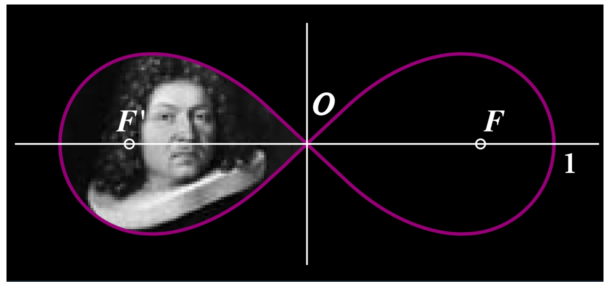
Le 2 juillet 2005, un psychiatre japonais, Akira Haraguchi, pulvérisait un étrange record : en 13 heures, il récitait par cœur, et dans l'ordre, les 83 431 premières décimales de π. L'intérêt de ce type de mémorisation ne dépasse pas le plaisir de la performance : aucune situation concrète ne requiert la connaissance de plus de quelques décimales, qu'il s'agisse de π ou de n'importe quel autre nombre.

Pourtant, ce record fait écho à un autre, détenu par un autre Japonais, mathématicien celui-là, Yasumasa Kanada : celui du nombre de décimales de π calculées, soit 1 241,1 milliards. Au-delà de la performance, cette fois, quelques mathématiciens de par le monde ont une raison précise de s'intéresser aux décimales de π. Ils tentent, par ce moyen, de répondre le mieux possible à une question posée il y a un siècle par le mathématicien français Émile Borel [1] : π est-il « normal » ? C'est-à-dire, dans le développement décimal de π, tous les chiffres apparaissent-ils avec la même fréquence statistique, et toutes les séquences d'un nombre donné de chiffres apparaissent-elles aussi souvent les unes que les autres. Borel pose aussi cette question pour d'autres nombres irrationnels. Certains sont beaucoup plus simples à calculer que π, par exemple √2. Pourtant, à son époque déjà, c'est π qui mène la danse. L'arrivée de l'informatique, à la fin des années 1940, ne fait qu'amplifier cette suprématie. Ainsi, à peine l'armée américaine est-elle dotée de son premier ordinateur, l'Eniac, en 1949, qu'elle le mobilise pour calculer les 2 035 premières décimales de π. Pour √2 en revanche, les 1 542 décimales trouvées, à la main, par l'Américain Horace Uhler en 1951 ne sont dépassées qu'en 1967, avec la publication d'une liste de 14 000.

Deux fois en tête

Depuis, √2 a deux fois pris la tête de cette course sans fin aux décimales. La première, en 1971, avec un million de décimales (π n'en était alors qu'à 500 000). En 1973, π reprend l'avantage de justesse avec 1 001 250 décimales. La seconde fois, en 1997, est due à Kanada et à son collègue Daisuke Takahashi, qui produisent plus de 137 milliards de décimales pour √2 à l'aide d'une puissante machine, le Hitachi SR2201, qu'ils font fonctionner durant 7 heures et 31 minutes vérifications comprises. La même année, le ⇨

[1] Émile Borel, *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 27,* 247, 1909.



LA LEMNISCATE étudiée au XVIIe siècle par le Suisse Jacques Bernoulli (en arrière-plan) est construite à partir de deux foyers F et F'. Pour tout point M de la courbe, MF.MF'= (FF')²/4.

record pour π n'est que de 51 milliards de décimales, alors que la même équipe a fait fonctionner la même machine durant près de 38 heures pour l'établir. Mais cette victoire de √2 est de courte durée : dès 1999, Kanada et Takahashi, toujours eux, redonnent l'avantage à π, avec plus de 206 milliards de décimales, chiffre amélioré en 2002.

√2 serait-elle donc condamnée à la seconde place ? À y regarder de plus près, les choses ne sont pas aussi tranchées. Ce n'est pas un hasard si Kanada et Takahashi détiennent les records de décimales à la fois pour π et pour √2. Ces deux nombres sont en effet étrangement liés. Mieux : pour progresser dans les décimales de π, il est souvent nécessaire de progresser dans celles de √2.

L'histoire commune de π et de √2 commence au IIIe siècle avant notre ère, lorsque Archimède invente une méthode d'approximation de π, en usage jusqu'au XVIIe siècle (lire l'encadré « Le cercle d'Archimède »). Les destins de ces deux nombres ont ensuite été dissociés par les progrès de l'analyse mathématique, qui ont permis d'établir des formules de calcul de π plus performantes. Mais, en 1976, ils ont été à nouveau réunis, à l'issue d'un cheminement pour le moins tortueux qui a duré plusieurs siècles.

Celui-ci commence au XVIIe siècle, lorsque des mathématiciens s'intéressent à une courbe nommée la « lemniscate de Bernoulli ». Elle se définit à partir de deux points du plan, *F* et *F'*, appelés « foyers » : la lemniscate est l'ensemble des points *M* tel que le produit des distances de *M* à *F* et à *F'* est constant, cette constante étant fixée par la contrainte supplémentaire que le milieu de *F* et de *F'* appartient à la courbe (voir graphe ci-contre).

Dès 1691, le Suisse Jacques Bernoulli cherche à déterminer la longueur de cette courbe. Il en découvre une expression sous « forme intégrale » qui, en théorie, permet d'en connaître une approximation aussi fine que désirée. En pratique, elle vaut à peu près 5,244.

Les choses en sont là à la fin du XVIIIe siècle lorsque l'Allemand Carl Gauss s'intéresse à un algorithme qui semble n'avoir rigoureusement rien à voir, appelé aujourd'hui algorithme de la moyenne arithmético-géométrique. Cet algorithme part de deux nombres *a* et *b* dont on calcule les moyennes arithmétique ($(a + b)/2$) et géométrique ($\sqrt{ab}$), pour obtenir deux nouveaux nombres dont on calcule à nouveau les moyennes arithmétiques et géométriques, et ainsi de suite. On peut démontrer que plus on avance ainsi, plus les nombres ainsi obtenus par paires s'approchent d'une même valeur, notée $M(a, b)$ et quelque peu improprement appelée moyenne arithmético-géométrique de *a* et de *b*.

La longueur de la lemniscate

Gauss trouve en 1799 un lien inattendu entre la longueur de la lemniscate, qu'il note ϖ (« pi script »), et la moyenne arithmético-géométrique, qui rapproche de façon tout aussi inattendue π et √2. Le 30 mai de cette année-là, il écrit en effet dans son journal : *« J'ai démontré que les 11 premières décimales de la moyenne arithmético-géométrique de 1 et de √2 sont les mêmes que celles de π/ϖ ; la démonstration de ce fait ouvrira sûrement tout un nouveau champ de recherche en analyse. »*

Ce n'est finalement qu'en 1818 que Gauss donne une démonstration rigoureuse de l'égalité $M(\sqrt{2}, 1) = \pi/\varpi$. Nous n'allons pas démontrer cette relation ici, mais donnons-en tout de même l'esprit. L'algorithme de la moyenne arithmético-géométrique évoque la méthode d'extraction de racines carrées proposée au IVe siècle avant notre ère par le Grec Archytas de Tarente, avec laquelle √2 s'obtient comme « moyenne arithmético-harmonique » de 1 et de 2 (lire l'encadré « La moyenne harmonique »). Cet algorithme consiste à calculer la moyenne arithmétique et la moyenne harmonique de *a* et de *b*, puis à recommencer avec ces deux nouveaux nombres, et ainsi de suite : les paires de nombres successivement calculées se rapprochent de la moyenne géométrique de *a* et de *b*, c'est-à-dire de $\sqrt{ab}$, en vertu du fait remarquable que ces paires de nombres successivement construites sont de produit constant et égal à *ab*.

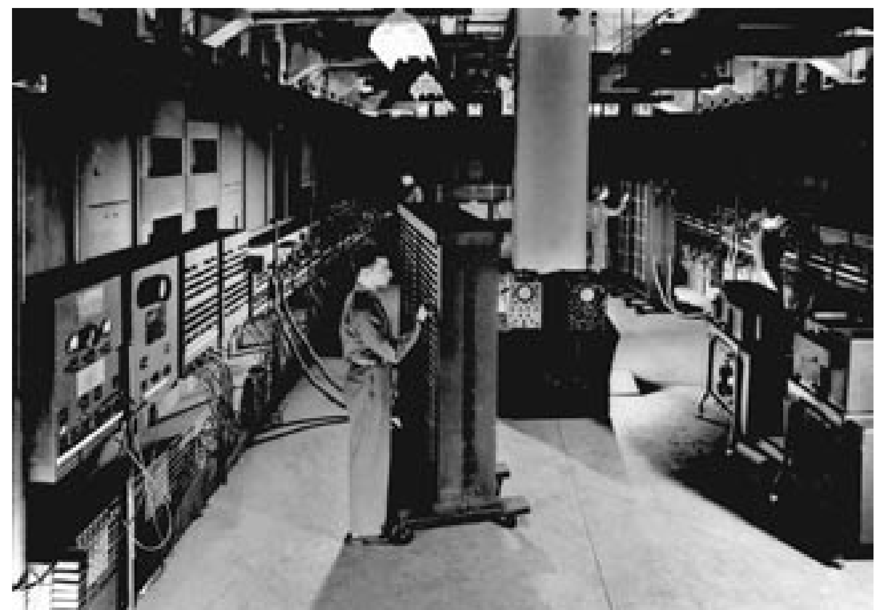
En techniquement plus compliqué, c'est un peu la même chose pour l'égalité découverte par Gauss. Pour la moyenne arithmético-géométrique, ce n'est plus le produit des nombres de chaque paire qui reste constant, mais leur « intégrale elliptique complète de première espèce »*, notée $I(a, b)$, qui se trouve liée à $M(a, b)$ par la relation $M(a, b) \times I(a, b) = \pi/2$. Lorsque a = 1 et b = √2, l'intégrale elliptique correspondante est égale à la moitié de la longueur ϖ de la lemniscate, d'où l'égalité de Gauss.

Gauss lui-même voyait la relation $M(a, b) \times I(a, b) = \pi/2$ comme un moyen de calculer explicitement des intégrales elliptiques. En 1976, toutefois, l'Américain Eugene Salamin et l'Australien Richard Brent, à l'aide de manipulations auxiliaires sur ces intégrales, en ont tiré indépendamment une façon de calculer des décimales de π. Il serait exagérément long de les détailler ici, mais disons tout de même qu'elles ne sont pas, somme toute, très compliquées. Salamin le reconnaît d'ailleurs dans son article d'à peine six pages [2] : *« Il est assez surprenant qu'une formule pour π qui s'obtient aussi facilement soit apparemment restée inconnue pendant cent cinquante-cinq ans »*, (l'auteur précise que sa découverte date de 1973). Encore plus surprenant est que, de plus, cette formule ait finalement été découverte indépendamment par deux personnes quasiment en même temps !

Deux algorithmes

L'algorithme de Brent-Salamin (lire l'encadré « Des algorithmes pour π ») est très rapide : on dit qu'il est à convergence « quadratique », c'est-à-dire que le nombre de décimales exactes double à chaque étape. Depuis l'avènement de cette méthode de calcul, il est rare que les records de décimales de π ne soient pas battus grâce à l'une ou l'autre de ces variantes qui, toutes, requièrent l'utilisation de √2 et, donc, la connaissance d'un grand nombre des décimales de celui-ci.

En pratique, un record de décimales de π ne s'obtient pas uniquement à partir d'un seul algorithme : la règle veut que les décimales ⇨



L'ENIAC, PREMIER ORDINATEUR de l'armée des États-Unis installé en 1945 à l'université de Pennsylvanie, a été utilisé dès 1949 pour calculer les 2045 premières décimales de π, record de l'époque.

* **L'intégrale elliptique complète de première espèce** est la fonction qui exprime la période d'un pendule oscillant en fonction de l'angle de départ.

[2] Eugene Salamin, *Math. of Comp.*, *30*, 565, 1976.

CALCUL — Des algorithmes pour π

LA FORMULE DE BRENT-SALAMIN utilisée pour le calcul des décimales de π est la suivante :

$$\pi = \frac{4\,M(1, 1/\sqrt{2})^2}{1 - \sum_{j \geq 1} 2^{j+1} c_j^2}$$

c_j est la racine carrée de la somme des carrés des deux nombres de la *j*-ième étape du calcul de $M(1, \sqrt{2})$, la moyenne arithmético-géométrique.

Avec l'algorithme de Borwein, on part de la valeur $a = 6 - 4\sqrt{2}$ et de la valeur $y = \sqrt{2} - 1$. On remplace alors y par

$$\frac{1-(1-y^4)^{1/4}}{1+(1-y^4)^{1/4}}$$

Cela fait, on remplace *a* par

$$a(1+y)^4 - 2^5 y(1+y+y^2)$$

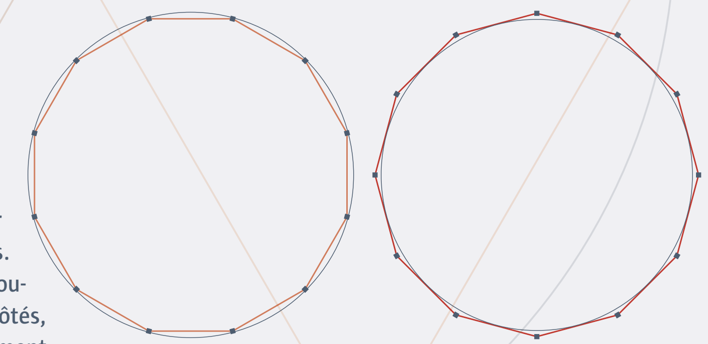
On recommence ensuite ces deux étapes, en ajoutant 2 chaque fois à l'exposant de 2 dans la seconde formule (2^5 devient 2^7 au passage suivant, puis 2^9, et ainsi de suite). Le théorème de Borwein énonce que les valeurs de *a* successivement obtenues par la répétition des étapes précédentes s'approchent de 1/π et de façon « quartique », c'est-à-dire que le nombre exact de décimales est multiplié par quatre chaque fois.

MÉTHODE — Le cercle d'Archimède

LA PLUS ANCIENNE MÉTHODE de détermination de π est due à Archimède. L'idée consiste à approcher la circonférence du cercle par une ligne brisée polygonale formant un polygone régulier. Historiquement, Archimède est parti d'hexagones, pour lesquels le périmètre de l'hexagone inscrit est de 3 et celui de l'hexagone circonscrit de 2√3. En doublant le nombre de côtés des hexagones, Archimède obtient des dodécagones (polygones à 12 côtés) inscrit et circonscrit, dont il exprime les périmètres à partir de ceux des hexagones. Cela fait, il double une nouvelle fois le nombre de côtés, pour obtenir successivement des polygones à 24, 48 et enfin 96 côtés (il n'est pas allé plus loin, sans doute satisfait qu'il était d'avoir suffisamment illustré l'efficacité de sa méthode). Archimède a démontré que si l'on note *p* et *q* les périmètres des polygones inscrit et circonscrit d'une certaine étape, alors ceux, *p'* et *q'*, des polygones inscrit et circonscrit de l'étape suivante valent :

$$q' = \frac{2}{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}}$$

$$\text{et } p' = \sqrt{pq'}$$



DANS LE DESSIN DE GAUCHE, le périmètre du polygone inscrit dans le cercle est plus petit que la circonférence ; la détermination de ce périmètre permet ainsi de minorer la valeur de π. Dans le dessin de droite, le polygone est circonscrit, son périmètre majore π.

EN PRENANT DES CARRÉS pour premiers polygones réguliers inscrit et circonscrit, on a alors p = 2√2 et q = 4 : disposer d'une bonne estimation de la valeur de √2 permet donc d'obtenir des décimales de π. Dans les faits, beaucoup de chasseurs de décimales de π ont suivi Archimède et sont partis de l'hexagone et de √3. Certains pourtant ont choisi le carré et √2 : c'est notamment le cas du record de Ludolph Van Ceulen (35 décimales) au début du XVIIe siècle.

INTERVIEW YASUMASA KANADA « Nous vérifions les performances des ordinateurs »


© LIONEL DERSOT

YASUMASA KANADA, de l'université de Tokyo, a battu près de 20 fois le record du nombre de décimales de π.

Le 24 novembre 2002, l'équipe de Yasumasa Kanada terminait la vérification des 1 241,1 milliards de décimales de π et des 10 307 milliards de chiffres en hexadécimal qu'ils avaient calculés. Le résultat de quatre ans de travail pour dix personnes. Ils ne comptent pas en rester là.

▮ Depuis plus de vingt ans, vous battez régulièrement le record du nombre de décimales de π. Dans quel objectif ?

Yasumasa Kanada : Je cherche à vérifier les performances des ordinateurs qui équipent le centre de technologie de l'information de l'université de Tokyo, auquel j'appartiens. Pour cela, en pratique, il faut faire réaliser aux machines des tâches complexes, qui utilisent beaucoup de mémoire, avec beaucoup d'opérations d'écriture et de lecture, la manipulation d'énormes quantités de nombres et la production de réponses faciles à vérifier. L'un de ces calculs exigeants est celui des décimales de π. D'où la succession de records que nous avons battus avec mes collègues. Nous pourrions bien sûr calculer d'autres constantes mathématiques telles que √2, *e* ou *γ*, la constante d'Euler. Mais π est la plus convaincante pour les profanes.

▮ Ces records sont-ils seulement dus à l'amélioration des ordinateurs, ou aussi des algorithmes?

La limitation la plus importante est la taille de la mémoire principale. La seconde est la puissance de calcul de la machine. Le record actuel a été établi en 601 heures et 56 minutes de calcul effectif, en utilisant 1 024 gigabits de mémoire et une capacité de calcul de 900 gigaflops*. Nous disposons déjà d'une machine de 5 000 gigabits et 5 000 gigaflops, et d'ici à un an et demi, nous triplerons encore ces valeurs. J'espère que nous pourrons annoncer un nouveau record d'ici là. Mais pour établir le dernier record en date, nous avons aussi utilisé des algorithmes complètement différents des calculs précédents. Ils sont fondés sur des sommes de la fonction arctangente*. Ils nous ont permis d'utiliser la mémoire trois fois plus efficacement. Le prix à payer a été la réécriture complète des programmes, environ 79 200 lignes de code avec les commentaires.

▮ Propos recueillis par Luc Allemand

*** Un gigaflop correspond à un milliard d'opérations en virgule flottante par seconde.**
*** La fonction arctangente est la réciproque de la fonction tangente, rapport du sinus et du cosinus.**

[3] Daisuke Takahashi, « Fast multiple-precision arithmetic on distributed memory parallels computers and its applications », thèse de l'université de Tokyo, 1998.

⇨ soient obtenues à l'aide d'une seconde méthode, ce qui valide le résultat obtenu. Salamin lui-même remarquait que son résultat fournissait plusieurs formules équivalentes, celle impliquant √2 n'étant préférable que dans un souci de rapidité. L'équipe japonaise dirigée par Kanada, en pointe depuis de nombreuses années dans la course au record, a exploité, en complément de l'algorithme de Brent-Salamin, une formule imaginée par Jonathan Borwein et Peter Borwein en 1987, et qui s'est révélée elle aussi très efficace. Surprise : cette seconde méthode utilise elle aussi √2, décidément incontournable.

Match nul ?

La plupart des récents records ont été obtenus à l'aide des deux algorithmes précédents, un peu améliorés [3]. Ainsi, en filigrane, pour bien des records de décimales de π, se cache un record correspondant pour √2, et pour nul autre nombre. L'écrasante supériorité du prestige de π se manifeste toutefois au travers du fait suivant : pour appliquer l'une comme l'autre des formules précédentes et atteindre le record de 206 milliards de décimales de π en 1999, il a logiquement été nécessaire à Kanada et Takahashi de connaître √2 avec autant de décimales. C'est ainsi que, préalablement à leur calcul de π, Kanada et Takahashi ont calculé 206 milliards de décimales de √2, nouveau record en date… mais ces décimales, trop peu prestigieuses, n'ont pas été conservées dans la mémoire de leur ordinateur, économie de place oblige !

Pour Archimède, l'extraction de racines carrées n'avait été qu'un instrument pour cerner la valeur de π. Les calculs de l'équipe de Kanada, et d'autres avant eux, consacrent la subordination de la quête des décimales de √2 à celle des décimales de π. Il se peut que les méthodes héritées du XVII[e] siècle, qui n'utilisent pas √2, s'imposent à nouveau. C'est ce qui s'est produit pour les 1 241,1 milliards de décimales de π de Kanada, dernier record en date. Mais dans le cas contraire, π et √2 resteront condamnés au match nul. ▮▮ **B. R.**

RACINES La moyenne harmonique

▮ ON APPELLE MOYENNE « HARMONIQUE » de deux nombres *a* et *b* la valeur *h* définie par la formule :

$$h = \frac{2ab}{a+b}$$

On prête à Archytas de Tarente d'avoir remarqué que, *a* et *b* étant fixés, le produit de leurs moyennes harmonique et arithmétique $((a+b)/2)$ est égal à *ab* et que cela permet de calculer des racines carrées. À partir d'un rectangle de côtés *a* et *b* (et donc d'aire *ab*), construisons un rectangle dont les côtés sont les moyennes harmonique *h* et arithmétique *m* de *a* et *b* : d'après ce qui précède, l'aire de ce nouveau rectangle est encore égale à *ab*. Recommençons en prenant les moyennes harmonique et arithmétique de *h* et *m*, et ainsi de suite : les côtés des rectangles s'égalisent progressivement. On s'approche donc d'un carré d'aire *ab*, donc de côté √(*ab*). En partant par exemple d'un rectangle de côtés 1 et 2, la méthode permet d'approcher √2.