Curriculum vitae

Schwartz Lionel
Né le 7 Mai 1953 à Paris 19,
59 rue de la Hacquinière, 91440 Bures sur Yvette,

- Tel: 0149403587
- page web : http://www.math.univ-paris13.fr/ schwartz/
- courriel : schwartz@math.univ-paris13.fr
- Adresse Professionnelle: Université Paris-Nord, Institut Galilée, Mathématiques, LAGA, UMR 75 39 du CNRS, Av. J.-B. Clément 93430, Villetaneuse
- Professeur classe exceptionnelle
- Section 25

Etudes Universitaires et carrière

- 1972-1976 Elève à l'Ecole Normale Supérieure,
- 1975 Agrégation de Mathématiques,
- 1976 Doctorat de Mathématiques (Directeur Max Karoubi), Université Paris 7,
- 1983 doctorat d'Etat (Directeur Max Karoubi), Université Paris 7
- 1976-1982 Attaché de recherches au CNRS,
- 1983-1990 Chargé de recherches au CNRS,
- 1990 à ce jour professeur à l'Université Paris-Nord,

Enseignement

Tous niveaux du L1 au M2, concours de recrutement des enseignants (ouverture de l'Agrégation de Mathématiques à Paris 13, restructuration du CAPES).

J'ai obtenu un demi CRCT en 2007-2008 et une déharge (48H) en 2008-2009 du Conseil Scientifique de paris 13 en tant que porteur de projet ANR.

Responsable de la coopération concernant le master international de mathématiques de Hanoi.

Encadrement doctoral et post-doctoral
Depuis 1996.

- 1996/1997 : stage de DEA de A. Troesh (d'aprs Friedlader-Suslin) , puis thèse soutenue en Novembre 2003. Cette thèse a donné lieu à 4 publications (CRAS, Fund. Math. Journal of Algebra, Comm. in Alg.). Actuellement professeur en CPGE.

- 1998/-2001: stage post-doctoral de S. Whitehouse, étudiante de A. Robison (bourse Marie Curie). Plusieurs articles publiés. (Heidelberg/Strasbourg), bourse TMR. 2 articles publiés. MCF à Sheffield.

- 1997/1998 : stage de DEA de F. Déglise (d'après le livre de Bousfield-Kan Homotopy limits, completions and localizations).

- 1998/-2001: stage post-doctoral de D. Meyer, étudiante de H.-W. Henn (Heidelberg/Strasbourg), (bourse Marie Curie). Plusieurs articles publiés. D. Meyer a un poste dans l'administration de l'UE (après un poste de 7 ans à Goettingen).

- 2000/2001 stage de DEA de Jiang Dong Hua, puis thèse soutenue en Mai 2005 (2 articles publiés, Annales Inst. Fourier et AGT) . Actuellement ingénieur dans une entrprise d'informatique.

- 2000/2001 stage de DEA de Tran Ngoc Nam (sur Milnor-Moore); cotutelle de thèse avec Nguyen H. V. Hung (Hanoi) à partir de 2001, soutenance à Hanoi Octobre 2006 (MCF à l'UNV Hanoi).

- stage de DEA (construction générale de l'algbre de Steenrod) puis thèse de C. Vespa, soutenance en Décembre 2005 (4 articles CRAS, Fund. Math, AGT, JPAA), (MCF Strasbourg).

- 2005 stage de DEA de (Groupes formels) (a suivi depuis la filière d'ingénieurs)

- 2005 stage de DEA (endomorphismes de la cohomologie des espaces d'Eilenberg-Mac Lane) puis thèse de Nguyen D. Ho Hai, depuis 2005 (soutenance prévue en 2009-2010)

- 2008 Stage Master 1 de Qin Botao (connjecture de Suliivan) à l'Ecole Polytechnique.

- 2009 Stage Master 2 M2 (théorme de HJopkins-Miller) de Geoffrey Horel à l'Ecole Polytechnique.

Conférences invitées
Depuis 1996.

- Oxford, Juin 1996, Mini-conférence de théorie de l'homotopie.

- Barcelone UAB, Novembre 1996, Mini-conférence de topologie algébrique.
- Barcelone UAB, Juin 1998, satellite de l'ICM.
- Université de Bielefeld, Euroconférence sur les modules de longueur infinie, Septembre 1998.
- Congrès en l'honneur de Max Karoubi, Université Paris 7, Novembre 1998.
- Schloss-Ringberg, Congrès sur les foncteurs polynomiaux, Janvier 1999.
- Séminaire, Université de Tunis Juillet 1999.
- Colloquium Bâle Janvier 2000.
- Ecolé d'été Tunis été 2001.
- conférence du réseau européen Leicester automne 2001.
- conférence en l'honneur de F. Pham et Hyunh Mui, Dalat Dec. 2004.
- Workshop de théorie de l'homotopie, Barcelona (UAB) Juin 2007.
- Séminaire Université de Manchester Avril 2008.

Participation à l'organisation de colloques : comité scientifique ou d'organisation, , séminaires, (depuis 1995)

- Séminaire sur l'homologie de MacLane à l'IHES avec N. Kuhn en 1995.
- Congrès au CIRM Luminy 12/19 Janvier 1997.
- Co-organisation avec C. Broto et R. Piccinini du "First Euro-Mediteranean Topology meeting, Universitat Autonoma Barcelona Juillet 2000, Satellite de l'ECM 2000).
- Journées Etat de la Recherche (Socitété mathématique de France), Nantes Décembre 2001.
- Journées d'Arithmétique, Géométrie et Topologie à l'occasion du soixantième anniversaire de Larry Breen, Décembre 2004.
- Congrès de K-théorie et de théorie de l'homotopie (réseau INTAS) Montpellier Janvier 2005.
- Congrès de K-théorie et de théorie de l'homotopie (réseau INTAS) Tbilissi Mai 2007.
- SECA IV (Congrès de théorie des catégories) Barcelona Juin 2007.

- Congrès de théorie de l'homotopie en l'honneur de Jean Lannes Djerba (Octobre 2007).
- Congrès de K-théorie et de théorie de l'homotopie (réseau INTAS) Saint Jacques de Compostelle Septembre 2008.
- Congrès Franco-Tunisien Mars 2009.

Contrats

- Coordinateur (local) parisien du réseau HCM de théorie de l'homotopie (1995/1997), le coordinateur central en était R. Piccinini à Milan.
- Responsable du PICS CNRS Formath-Vietnam (2006-2008)
- Coordinateur local d'un réseau INTAS "Caucase" de K-théorie et théorie de l'homotopie (Paris 13, Copenhague, Munster, Tbilissi, Bakou) (2007-2009).
- Responsable de l'ANR blanche HGRT depuis Janvier 2009.
- Coordinateur du réseau INTAS 03-5-3251 de K-théorie et théorie de l'homotopie (Paris 13, Montpellier, Louvain la Neuve, Glasgow, Tbilissi, Saint Petersbourg, Novossibirsk) (2004-2007).

Principales responsabilités administratives, scientifiques, dans les sociétés scientifiques, journaux

- Chargé de Mission Bureau des Relations Internationales de l'Université Paris-Nord (mission échue le 31/12.2007)
- Directeur du LAGA du 01/04/99 au 30/09/2004.
- Membre du conseil scientifique de l'Université (2002 à 2006).
- Membre du bureau de l'Université (2003-2006)
- Membre du bureau et trésorier de la Société Mathématique de France, 2006-2008, membre du conseil depuis 2005.
- Responsable de l'action "Mali" Paris13-Bamako depuis sa création (2002), financement : essentiellement ambassade de France à Bamako.
- Editeur à Manuscripta mathematica, JHRS, Acta Math. Vietnam, Advances in Pure and Applied Mathematics.
- Actuellement je m'investis beaucoup dans les projets de coopration avec le Vietnam, entre autres le projet d'USTH Hanoi, un projet ARCUS, un projet de Laboratoire International Associ, et bien videmment en premier lieu le Master international de mathmatiques de Hanoi.

Publications
Livres et Edition de Proceedings de congrès

- *Unstable modules over the Steenrod algebra and Sullivan's fixed point set conjecture*, **Chicago Lectures in Mathematics Series**, (1994) 226 pages.
- *Cours d'algèbre de licence*, **Dunod** 1998
- Proceedings of the School and conference in Algebraic Topology Hanoi 2005. Geom Top. Pub. 2007, Coventry.

Articles

[1] *Opérations d'Adams en K-homologie et applications*, **Bull. Soc. Math. France, 109**, (1981).

[2] *Vecteurs propres de l'opération d'Adams dans* $K_0(\mathbf{CP}^\infty/\mathbf{CP}^k)$, **CRAS 296 Série I**, (1983).

[3] *Propriétés de divisibilité des puissances des classes de cohomologie de dimension* 4 *des variétés à fibré stablement trivial*,**CRAS 298 Série I**, (1984).

[4] (avec V. Franjou),*Hypersufaces et homotopie stable de* U,**CRAS 299 Série I**, (1984)

[5] (avec N. Ray) *Constructions d'éléments dans* $\pi_*^s(BU(2))$*,* **Bull. Soc. Math. France, 111**, (1983).

[6] *K-théorie de corps finis et homotopie stable du classifiant d'un groupe de Lie,* **J.P.A.A, 34**, (1984).

[7] (avec S. Ochanine) *Une remarque sur les générateurs du cobordisme complexe,* **Math. Z. 190**, (1983).

[8] (avec J. Lannes) *A propos de conjectures de Serre et Sullivan,* **Invent. Math. 83**, (1986) 593-603.

[9] (avec A. Baker et N. Ray) *Hypersurfaces framées et l'élément* β_1 *de Toda,* **Bull. Can. Math. 30**, (1987).

[10] *La filtration nilpotente de la catégorie* $\mathcal{U}$ *et la cohomologie des espaces de lacets,* Proc. Louvain la Neuve 1986, **Springer Lectures Notes in Math. 1318**, (1988).

[11] (avec A. Baker, F. Clarke et N. Ray) *On the Kummer congruences and the stable homotopy of BU,* **Trans. Am. Soc. 316**, (1989).

[12] (avec J. Lannes) *Sur les groupes d'homotopie des espaces dont la cohomologie modulo 2 est nilpotente,* **Israel J. of Math. 66**, (1989) 260-273.

[13] (avec J. Lannes) *Sur la structure des A-modules instables injectifs,* **Topology 28**, (1989) 153-169.

[14] (avec H.-W. Henn) : *Indecomposable A-module summands in H^*V which are unstable algebras,* **Math. Z. 205**, (1990), 145-158.

[15] (avec V. Franjou): *Reduced unstable A-modules and the modular representation theory of the symmetric groups*, **Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 23**, (1990), 593-624.

[16] (avec H.-W. Henn et J.Lannes) *The categories of unstable modules and unstable algebra over the Steenrod algebra modulo its nilpotent objects*, **Am. J. of Math. 115**, 5 (1993) 1053-1106.

[17] (avec V. Franjou et J.Lannes) *Autour de la cohomologie de MacLane des corps finis*, **Invent. Math. 115**, (1994) 513-538.

[18] (avec H.-W. Henn et J.Lannes) *Localizations of unstable modules and equivariant mod p cohomology*, **Math. Ann. 301**, (1995) 23-68.

[19] (avec L. Piriou) *Extensions de foncteurs simples*, **K-Theory 15**, 269-291, 1998.

[20] *A propos de la conjecture de non-réalisation due à N. Kuhn*, **Invent. Math. 134**, 211-227, (1998).

[21] *La filtration de Krull de la catégorie des modules instables et la cohomologie des espaces.*, **A. G. T. 1** (2001) 519-548.

[22] (avec L. Piriou) *A property of the polynomial filtration of polynomial functors,* **Georgian Math. Journal 9** (2002) 785-804

[23] Vincent Franjou, Eric M. Friedlander, Teimuraz Pirashvili, Lionel Schwartz Rational Representations, the Steenrod Algebra and Functor Homology Panoramas et Synthèses 16 (2003), xxii+132 pages

[24] (avec G. Gaudens) Un théorème d'annulation en cohomologie de Mac Lane. (French) [A vanishing theorem in Mac Lane cohomology],C. R. Math. Acad. Sci. Paris 341 (2005) n2

[25] Le groupe de Grothendieck de la catégorie des modules instables, Communications in Algebra, Volume 34, Number 5/2006

[26] Résolutions de certains modules instables et fonction de partition de Minc. (avec Nguyen D. H. Hai et Tran Ngoc Nam) CRAS érie 1 347 n 11-12 (2009)

Remarque : Les notes au CRAS ont été inclues dans la liste précédente ou la suivante selon le cas (annonce ou non, etc...).

Autres Publications et prépublications

[27] *Orientabilité du fibré de Hopf complexe dans la théorie cohomologique associée . . .* . **CRAS 289 Série I**, (1979).

[28] *Quelques familles d'éléments dans* $\pi_*^s(\mathbf{CP}^\infty)$, **CRAS 296, Série I,** (1983).

[29] (avec N. Ray) *Embedding complexes via unstable homotopy theory*, **Cont. Mathematics, 19**, (1983).

[30] *La conjecture de Sullivan d'après H. Miller*, Séminaire Bourbaki, exposé 638, **Astérisque 133-134**.

[31] (Avec H.-W. Henn et J. Lannes), *Analytic functors . . .* , Proc. Evanston 1988, **Cont. Mathematics 96**, (1989).

[32] *Unstable modules over the Steenrod algebra, functors, and the cohomology of spaces.* Actes de l'Euroconférence "Modules of infinite length" Bielefeld, Septembre 1998. **Trends in Mathematics**, 2000 Birkhäuser Verlag.

[33] (avec G. Gaudens)*L'indépendance linéaire de caractères et les sous-modules de la cohomologie modulo* 2 *des* 2*-groupes abéliens élémentaires. Prépublication Paris 13 (2002)*

[34] La fonction de partition de Minc et la cohomotopie de certains spectres de Thom (avec Nguyen D. H. Hai et Tran Ngoc Nam) Prépublication 2009.

[35] La fonction de partition de Minc et la cohomotopie de certains spectres de Thom II, réalisation homotopique (avec Nguyen D. H. Hai) en préparation.

Recherche

Ci dessous on trouvera un descriptif de mes activits de recherche. Des recherches en cours sont voques en fin des thmes 2 et 5.

- **1. Homotopie stable et variétés framées, cobordisme**

- Les publications [1], [2], [3], [4] ,[5], [6], [8], [27], [28] portent sur des calculs d'homotopie stable utilisant la théorie cohomologique associée à la K-théorie des corps finis. Celle ci est étroitement reliée à l'image du J-homomorphisme. Les polynômes numériques fournissent pour cette analyse un outil algébrique approprié. Il est particulièrement utile pour fournir une borne inférieure assez fine pour l'image de l'homotopie stable d'un espace dans l'homologie singulière d'un espace, ceci pour ce qui concerne la partie sans torsion de cette image. Divers cas sont étudiés dans les références données plus haut : espaces classifiants particulièrement. Sous une hypothèse de localisation (inversion de certains éléments dans l'homotopie stable), et en supposant que le nombre premier 2 est inversé, la borne évoquée calcule l'image de l'homomorphisme de Hurewicz. Cette technique a été exploitée ultérieurement par M. Crabb et K.H. Knapp dans le cas des espaces projectifs tronqués (nombres de James) (Am. J. of Math 1988. 110).

  Une étude des éléments de torsion a aussi été faite dans ce contexte.

  Dans ces papiers on donne aussi des constructions des variétés framées représentant certaines classes détectées algébriquement par le procédé ci-dessus.

- Dans [9] (avec A. Baker et N. Ray), à l'aide de techniques de chirurgie est construite une hypersurface framée représentant l'élément β_1 de Toda, hypersurface dont l'existence avait été montrée par Ray et Walker. Rappelons que cet élément est le premier de la comoposante p-primaire (p premier) de l'homotopie stable des sphères qui ne soit pas dans l'image du J-homomorphisme.

- L'article [7] (avec S. Ochanine) reste dans un domaine voisin. Il est relié aux idées utilisées dans ce qui précède. On y démontre en particulier, que l'on peut trouver des générateurs du cobordisme complexe dont le fibré normal stable est somme de fibrés en droites complexes. On trouve en appendice un corollaire algébrique.

- **2. Structure des modules instables, suite spectrale d'Eilenberg-Moore, homotopie des espaces.**

- Les articles [10] et [13] portent sur la structure des modules instables sur l'algèbre de Steenrod. On y introduit la filtration nilpotente sur la catégorie des modules instables [10]; l'article [13] (avec J. Lannes), qui est en fait antérieur à [10], classifie les injectifs de la catégorie. Diverses applications topologiques sont données, entre autres une réciproque du théorème de H. Miller qui affirme que l'espace des applications pointées du classifiant $B\mathbf{Z}/2$ vers un espace fini est contractile :

  Théorème : *Soit X un espace simplement connexe tel que l'espace des applications pointées de $\mathbf{BZ}/2$ dans X est contractile, alors la cohomologie de X est limite directe de modules finis sur l'algèbre de Steenrod.*

- J'ai utilisé de manière récurrente la structure de module instable sur la suite spectrale d'Eilenberg-Moore. Par exemple dans [8] et [12] (avec J. Lannes) son étudie des applications de ces techniques aux groupes d'homotopie des complexes finis. Il s'agit de généralisation d'un théorème et d'une conjecture de J.-P. Serre, conjecture démontrée par McGibbon et Neisendorfer. La proposition à démontrer était qu'un complexe fini 1-connexe dont l'homologie modulo 2 est non-triviale a de la 2-torsion dans une infinité de groupes d'homotopie. La démonstration que l'on donne de la conjecture de Serre est plus élémentaire que celle de McGibbon et Neisendorfer en ce qu'elle ne fait pas appel au théorème de Miller. Elle est basée sur le théorème suivant :

  Théorème : *Si la cohomologie modulo 2 d'un espace est limite directe de modules finis il en est de même pour la cohomologie de son espace de laçets.*

  Voici un autre résultat :

  Théorème : *Un espace 1-connexe qui a un nombre fini de groupes d'homotopie et dont la cohomologie modulo 2 est non-triviale contient nécessairement une classe non-nilpotente dans sa cohomologie.*

  Récemment on a pu raffiner ce théorème.

- Avec Nguyen D. H. Hai et Tran Ngoc Nam on a pu très récemment (voir publication [26]) construire des résolutions injectives minimales pour la cohomologie modulo 2 de certains spectres de Thom. Ce résultat est très riche car il permet, *via* les techniques de Lannes-Zarati de faire des calculs de cohomotopie stable du type de ceux de la conjecture de Segal. Ces résultas trouvent leur origine dans des identités combinatoires concernat les fonctions de partition de Minc. En fait ces fonctions de partitions s'interprètent comme étant les séries de Poincaré de certains modules de Brown-Giler, et sont reliées aux séries de Poincaré des modules de Steiberg de Mitchell et Priddy. Dans une seconde étape on réalise topologiquement ces résolutions.

- **Théorème***Pour tout $n \geq 1$, il existe une résolution injective minimale dans $\mathcal{U}$:*

  $$0 \to L'_n \to L_n \to L_{n-1} \otimes J(1) \to \cdots \to L_1 \otimes J(2^{n-1}-1) \to J(2^n-1) \to 0.$$

  Les $J(k)$ sont des modules de Brown-Gitler, les L_n des modules de Steinberg à la Mitchell-Priddy, et L'_n désigne la cohomologie du spectre de Thom de la représentation régulière réduite au dessus de $L(n)$. Les applications topologiques montrent l'existence d'applications stables généralisant le transfert de Singer.

  Cette étude n'en est visiblement qu'à ses débuts, elle montre des liens entre diverses structures topologiques dont les identités combinatoires évoquées plus haut (et dues à Andrews) ne sont que la partie "apparente".

- **3. Modules instables et foncteurs**

- L'article [16] (avec Henn et Lannes) relie la catégorie de modules instables sur l'algèbre de Steenrod à la catégorie $\mathcal{F}$ des foncteurs de la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie sur un corps premier fini , soit k, dans la catégorie des espaces vectoriels sur ce corps. Cette catégorie est abélienne mais non semi-simple. Puis l'article étend l'analyse aux algèbres instables.

  Les deux résultats principaux de cet article sont les suivants :

  Théorème : *Il y a une équivalence de catégories entre le quotient $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$ de la catégorie des modules instables par sa sous-catégorie des modules nilpotents et celle des foncteurs analytiques (limite directe de foncteurs polynômiaux) de la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie sur le corps $\mathbf{F}_p$, dans la catégorie des espaces vectoriels sur ce corps.*

  Théorème : *Il y a une équivalence de catégories entre le quotient de la catégorie des algèbres instables sur l'algèbre de Steenrod par sa sous-catégorie des objets nilpotents et celle des foncteurs contravariants de la* *catégorie des espaces vectoriels V de dimension finie sur le corps $\mathbf{F}_p$, dans la catégorie des ensembles munis d'une action du monoïde* $\mathrm{End}(V)$.

Ces résultats permettent de retrouver et d'étendre la théorie d'Adams-Wilkerson de classification des algèbres instables et des algèbres d'invariants à des cas plus généraux.

- Dans [15] commun avec Vincent Franjou on a étudié les objets simples de la catégorie $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$ en procédant à partir du strict point de vue des modules instables et donné diverses applications, dont le calcul de la connectivité des facteurs stables du classifiant d'un 2-groupe abélien élémentaire. Cet article met en évidence les liens entre la catégorie des modules instables et celles des représentations modulaires des groupes symétriques :

  Théorème : *La catégorie $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$ admet une fitration naturelle croissante par des sous-catégories $\mathcal{V}_n$ tels que la catégorie quotient $\mathcal{V}_n/\mathcal{V}_{n-1}$ soit équivalente à celle des $\mathbf{F}_2[GL_n(\mathbf{F}_2)]$-modules.*

  Ce résultat peut tre établi dans le monde des foncteurs ett traduit. Ici on l'établit directement.

- Le livre aux University of Chicago Press décrit les travaux des années 80 et du début des années 90 sur la théorie des modules instables et la conjecture des points fixes de Sullivan. Il contient comme matériel original non publié ailleurs (ou de façon partielle) une analyse détaillée de la filtration nilpotente de la catégorie des modules instables et une analyse rapide de la filtration de Gabriel-Krull. Il contient également une présentation originale des liens entre la catégorie $\mathcal{F}$ et celle des modules instables sur l'algèbre de Steenrod.

- **4. Homologie des foncteurs, structure des foncteurs, modules instables.**

- L'article [17] (avec Franjou et Lannes) donne un calcul rapide des groupes $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}}(I, I)$, où I est le foncteur inclusion de la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie sur dans la catégorie des espaces vectoriels sur k. Ce calcul a été fait d'abord par Breen. Il équivaut à celui de la cohomologie de MacLane du corps k, et donc de la K-théorie stable.

  Théorème : *Les groupes ci-dessus sont égaux à k si i est pair, à* $\{0\}$ *sinon.*

  La sous-catégorie des foncteurs polynômiaux dans $\mathcal{F}$ est filtrée par le degré. La notion de degré d'un foncteur est définie comme suit : F est dit de degré inférieur ou égal à n si, notant Δ l'endofoncteur de la catégorie $\mathcal{F}$ déterminé par

$$\Delta(F)(V) = \ker(F(V \oplus k) \to F(V)) \quad ,$$

on a $\Delta^{n+1}(F) = 0$.

On définit aussi la notion de plus grand sous-foncteur de degré inférieur ou égal à n d'un foncteur F quelconque, on le note $t_n(F)$.

On note $\mathcal{F}_n$ la sous-catégorie pleine des foncteurs de degré inférieur où égal à n. La n-ème catégorie quotient $\mathcal{F}_n/\mathcal{F}_{n+1}$ est équivalente à celle des modules sur l'algèbre du groupe symétrique : $k[\mathcal{S}_n]$. Un objet simple de degré n de la catégorie $\mathcal{F}$ est classifié par un module simple sur $k[\mathcal{S}_n]$.

- L'article [19], étudie un autre type de problèmes liées aux extensions dans la catégorie $\mathcal{F}$.

  Le résultat le plus rapide à expliquer est le suivant :

  Théorème : *Un objet simple de la catégorie $\mathcal{F}$ n'a pas d'auto-extensions.*

  Cela doit être comparé avec le fait que les représentations correspondantes des groupes symétriques peuvent, elles, avoir des auto-extensions non-triviales.

- La publication [22] également en commun avec L. Piriou porte sur des questions reliées. La propriété étudiée compare deux filtrations sur les injectifs standards de la catégorie $\mathcal{F}$. Il y a deux filtrations naturelles sur un foncteur. La filtration par le degré d'Eilenberg-Mac Lane, spécifique à la situation dans laquelle nous nous trouvons.

  D'un autre côté on a la filtration de Loewy, ou filtration des socles. Celle ci, définie dans toute catégorie abélienne, est la filtration la plus fine sur tout objet de la catégorie.

  Le résultat montre que ces deux filtrations sont compatibles en un sens naturel :

  Théorème *Soit $F \in \mathcal{F}$ un foncteur dont l'enveloppe injective est facteur direct dans une somme directe finie d'injectifs indécomposables. Soit n un entier assez grand. Le socle de $F/t_n(F)$ est somme directe finie de foncteurs simples de degré $n+1$.*

- La puiblication25 décrit le groupe de Grothendieck de la catégorie des modules instables sur l'algèbre de Steenrod finiment engendrés. On énoncera :

  Théorème : *L'application qui a un module instable associe sa série de Poincaré est un homomorphisme injectif d'anneaux depuis le groupe de Grothendieck de la catégorie des modules instables finiment engendrés.*

- La prépublication (avec G. Gaudens) [30] porte sur un résultat cohomogique concernant la structure des sous-objets des cogénérateurs standards de la catégorie $\mathcal{F}$. **Notations :** Pour tout entier n de décomposition

2-adique $2^{a_1}+\ldots+2^{a_h}$, on note $\alpha(n)=h$ la longueur de sa décomposition 2-adique, $\Gamma(n)$ pour $\min_{i,i\neq j}(a_i,\ |a_i-a_j|)$.

Proposition *Soient δ, ℓ, n, k des entiers non nuls. Supposons que :*

- $\alpha(n)\geq\alpha(\ell)$
- $\Gamma(n)>\log_2(\delta)$
- $k>2\log_2(n)+\log_2(\delta)$.

Alors il existe une opération de Steenrod $\theta(\delta,n,\ell,k)$, telle que pour toute algèbre instable K et pout tout élément de degré δ dans K :

$$\theta(\delta,n,\ell,k)(x^n)=x^{2^k\ell}\quad.$$

L'opération $\theta(\delta,n,\ell,k)$ est donc universelle.

Ce résultat est très classique si $n=1$. Il a été reformulé et étendu par G. Powell.

5. Non-réalisation de modules instables comme cohomologie d'espaces

- L'article [20] démontre une conjecture due à N. Kuhn :

  Théorème : *Si la cohomologie modulo 2 d'un espace est un module ayant un nombre fini de générateurs sur l'algèbre de Steenrod alors c'est un module fini (i.e un espace vectoriel gradué fini).*

  Ceci fait appel à des techniques que j'avais développées dans [7] et précisées dans le livre aux presses de Chicago et uilise encore la suite spectrale d'Eilenberg-Moore. En fait on démontre que certains modules comportant de grandes zone d'annulation ne peuvent être cohomologie d'espaces.

  La stratégie développée permettent d'envisager de nouvelles techniques pour établir la non-représentabilité de modules sur l'algèbre de Steenrod comme cohomologie d'espaces.

  Dans [21] je démontre une forme forte de la conjecture de Kuhn (également conjecturé par Kuhn). Cette conjecture s'exprime à l'aide de la filtration de Krull de la catégorie $\mathcal{U}$. Rappelons que la filtration de Krull est construite comme suit. On considère la plus petite classe de Serre dans $\mathcal{U}$ contenant tous les objets simples, et stable par limite directe. C'est la sous-catégorie $\mathcal{U}_0$ des modules localement finis, *i.e.* limite directe de modules finis. Puis on fait la même opération dans la catégorie quotient $\mathcal{U}/\mathcal{U}_0$ et on définit $\mathcal{U}_1$ comme étant l'image inverse de $(\mathcal{U}/\mathcal{U}_0)_0$ Notons $\mathcal{U}_n$, $n\leq 0$, le n-iéme terme de la filtration. La catégorie $\mathcal{U}$ est la plus petite catégorie contenant les $\mathcal{U}_n$ et stable par colimite.

Par exemple la cohomologie d'un espace fini, ou de son espace de laçet est toujours dans $\mathcal{U}_0$, alors que la cohomologie du classifiant d'un groupe fini correspond, elle n'est dans aucune des $\mathcal{U}_n$.

La seconde conjecture de Kuhn s'énonce alors comme suit, soit X un espace, alors :

Théorème :

- *soit* $H^*X \in \mathcal{U}_0$,
- *soit* $H^*X \notin \mathcal{U}_n$, *pour tout* n.

Diverses formes plus fortes de la conjecture ont été étudiées entre autres par G. Gaudens.

Actuellement je travaille avec J. Scherer, sur le problème suivant, posé par Castellana, Crespo et Scherer : soit X un espace, supposons que les indécomposables de la cohomologie de l'espace des lacets $Q(H^*\Omega X)$ sont dans $\mathcal{U}_n$ peut on affirmer que $Q(H^*X)$ est dans $\mathcal{U}_{n+1}$? Castellana, Crespo, Scherer ont démontré cela si X est un espace de lacets. Ce problème a des liens tant avec le problème précédent qu'avec le thème 2.