

# 1 Le théorème de Blackers-Massey

Soient  $X = A \cup B$  de point base  $x_0$  un CW-complexe réunion de deux sous-CW-complexes  $A$  et  $B$ . Soit  $C = A \cap B$ , connexe sous-CW de  $A$  et  $B$ ,  $x_0 \in C$ . la paire  $(A, C)$  est  $m$ -connexe, la paire  $(B, C)$   $n$ -connexe.

**Théorème 1.1** *L'inclusion  $i$  de paires  $(B, C) \longrightarrow (X, A)$  induit une application*

$$\pi_k(B, C) \longrightarrow \pi_k(X, A)$$

*qui est un épimorphisme d'ensembles relatifs si  $k \leq m + n$ , un isomorphisme si  $k < m + n$*

# 2 Un cas particulier

Le théorème d'approximation cellulaire permet de se ramener essentiellement au cas suivant.

Soit  $X$  un espace de point base  $x_0$ , obtenu à partir d'un sous-espace  $C$  ( $x_0 \in C$ ) par adjonction d'une famille de  $m + 1$ -cellules et d'une de  $n + 1$ -cellules. Soient  $A \subset X$  obtenu à partir de  $C$  par attachement des cellules de la première famille, et  $B \subset X$  obtenu à partir de  $C$  par attachement des cellules de la seconde famille. On peut avoir  $m = n$ .

**Théorème 2.1** *L'inclusion  $i$  de paires  $(B, C) \longrightarrow (X, A)$  induit une application*

$$\pi_k(B, C) \longrightarrow \pi_k(X, A)$$

*qui est un épimorphisme d'ensembles relatifs si  $k \leq m + n$ , un isomorphisme si  $k < m + n$*

**Théorème 2.2** *L'inclusion  $i$  de paires  $(B, C) \longrightarrow (X, A)$  induit une application*

$$\pi_k(B, C) \longrightarrow \pi_k(X, A)$$

*qui est un épimorphisme d'ensembles relatifs si  $k \leq m + n$ , un isomorphisme si  $k < m + n$*

On commence par donner un cas particulier :

**Proposition 2.3** *Le théorème a lieu quand  $X = S^{m+1} \vee S^n$ ,  $C = *$ ,  $A = S^{m+1}$ ,  $B = S^{n+1}$ .*

**Lemme 2.4** *Le produit  $X = S^{m+1} \times S^{n+1}$  auquel on a enlevé un point se rétracte par déformation sur  $X = S^{m+1} \vee S^{n+1}$ .*

On peut interpréter  $X = S^{m+1} \times S^{n+1}$  comme un quotient approprié de  $D^{m+1} \times D^{n+1} \subset \mathbf{R}^{m+1} \times \mathbf{R}^{n+1}$ . On enlève l'origine à cet espace, on peut alors faire une homotopie linéaire entre l'identité et la projection radiale (depuis l'origine) sur le bord fournit une rétraction par déformation sur le bord. On vérifie qu'elle passe au quotient.

**Lemme 2.5** *L'inclusion  $S^{m+1} \vee S^{n+1} \longrightarrow S^{m+1} \times S^{n+1}$  induit un épimorphisme sur les groupes d'homotopie si  $k \leq m + n - 1$ , un isomorphisme si  $k < m + n + 1$ .*

En effet si on a une application  $S^k \longrightarrow S^{m+1} \times S^{n+1}$  avec  $k \leq m + n + 1$ , par des arguments standards on peut supposer qu'elle évite un point, et donc la remplacer à homotopie près par une application à valeurs dans  $S^{m+1} \vee S^{n+1}$  à cause du lemme précédent. Ceci donne la surjectivité, pour la bijectivité, il faut avoir  $k < m + n - 1$  pour ramener les homotopies dans  $S^k \longrightarrow S^{m+1} \times S^{n+1}$  privé d'un point.

**Lemme 2.6** *L'inclusion  $S^{m+1} \vee S^{n+1} \longrightarrow S^{m+1} \times S^{n+1}$  induit une bijection si  $k \leq m + n$  sur les ensembles relatifs*

$$\pi_k(S^m) \longrightarrow \pi_k(S^{m+1} \vee S^{n+1}, S^{n+1})$$

On peut d'après les lemmes précédents, dans les dimensions considérées, remplacer  $S^{m+1} \vee S^{n+1}$  par  $S^{m+1} \times S^{n+1}$ . La projection sur le facteur  $S^{m+1}$  peut alors être déformé en l'application constante utilisant la convexité de  $D^k$  (attention le bord  $S^{k-1}$  de  $D^k$  doit durant la déformation être envoyé dans  $S^{n+1}$ ,

**Lemme 2.7** *On a pour tout  $X$  et tout  $Y$  et tout  $k$  un isomorphisme induit par la première projection :*

$$\pi_k(X \times Y, Y) \cong \pi_k(X)$$

On considère l'inclusion de paires  $i : (X, x_0) \longrightarrow (X \times Y, Y) \vee Y$ , puis la projection  $(X \times Y, Y) \vee Y \longrightarrow (X, x_0)$ . La surjectivité est alors claire (l'inclusion dans le produit donne une section à la projection). Pour ce qui est de l'injectivité, il suffit de montrer que  $i_*$  est surjective. La seconde projection avec la convexité de  $D^k$  montrer que toute application  $\alpha : (D^k, S^{k-1}) \longrightarrow (X \times Y, Y)$  peut être déformée en une application dans l'image de  $i_*$  par l'homotopie

$$v \mapsto (p_1 \circ \alpha(v), p_2 \circ \alpha(ue_1 + (1-u)v))$$

ici  $u$  est le paramètre de déformation et l'extrémité du vecteur de base  $e_1$  est choisi comme point base de  $D^k$ . On notera le point important : l'image de  $S^{k-1}$  reste dans  $Y \subset X \times Y$  pour tout  $u$ .

Ceci étant en appliquant cette homotopie au cas qui nous intéresse on doit prendre garde à ce qu'elle reste à valeurs dans  $S^{m+1} \times S^{n+1}$  privé d'un point. A cet effet il est nécessaire d'avoir  $k+1 \leq m+n+1$ . Pour obtenir l'injectivité de manière analogue il faut avoir  $k+2 \leq m+n+1$ .

Dans une seconde étape on fait le même travail mais en remplaçant  $S^{m+1}$  par un bouquet de sphères  $S^{m+1}$ . Tout fonctionne à l'identique.

### 3 Cas général

On notera  $e^{m+1}$  et  $e_\alpha^{n+1}$  les cellules ouvertes adjointes pour passer de  $C$  à  $A$  et  $B$ ,  $q$  le centre de  $e^{m+1}$ ,  $p_\alpha$  celui de  $e_\alpha^{n+1}$ .

L'espace  $X \setminus \{p_\alpha\}$  se rétracte par déformation sur  $A$ , l'espace  $X \setminus \{q\}$  se rétracte par déformation sur  $B$ , l'espace  $X \setminus \{q; p_\alpha\}$  se rétracte par déformation sur  $C$ . On peut donc dans l'énoncé les substituer à  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

On a donc  $f$  une application de  $(D^k, S^{k-1})$  dans  $(X, A)$ , on va montrer qu'on peut la déformer en une application dans  $(B, C)$ .

Comme dans la démonstration du théorème de compression on identifie  $D^k$  à  $\Delta^k$  et  $S^{k-1}$  à  $\partial\Delta^k$  et on fait des subdivisions barycentriques itérées. On peut alors supposer que les simplexes de la subdivision dont l'image est d'intersection non vide avec  $d^{m+1} \subset e^{m+1}$  (boule ouverte de centre l'origine de rayon 1/2) ont leur image dans  $e^{m+1}$ . On peut supposer de même pour les simplexes dont l'image ont une intersection non vide avec  $d_\alpha^{n+1} \subset e_\alpha^{n+1}$ . Un simplexe de la subdivision ci-dessus est donc contenu dans  $\mathbf{R}^k$ .

On considère un des simplexes de la subdivision dont l'image par  $f$  est d'intersection non vide avec  $d^{m+1}$  ou  $d_\alpha^{n+1}$  pour un certain  $\alpha$  (et donc contenue dans  $e^{m+1}$  ou  $e_\alpha^{n+1}$ ). Les boules  $e^{m+1}$  et  $e_\alpha^{n+1}$  s'identifie à des sous-ensembles d'espaces affines. Si on considère la restriction un simplexe dont l'image est dans  $e^{m+1}$  ou  $e_\alpha^{n+1}$  on peut demander en sens évident que  $f$  soit restriction sur ce simplexe d'une application affine.

La méthode décrite pour démontrer le théorème de compression (1) montre que l'on peut déformer  $f$  pour garantir ceci sur tout simplexe dont l'image par  $f$  (avant déformation) est d'intersection non vide avec  $d^{m+1}$  ou  $d_\alpha^{n+1}$  pour un certain  $\alpha$ . On dira que  $f$  est affine par morceaux sur ce sous-ensemble (la réunion des simplexes dont l'image par  $f$  avant déformation est d'intersection non vide avec  $d^{m+1}$  ou  $d_\alpha^{n+1}$  pour un certain  $\alpha$ ).

On notera que la famille des simplexes dont l'image est d'intersection non vide avec un  $d_\alpha^{n+1}$  est disjointe de celle dont l'image est d'intersection non vide avec  $d^n$ .

Si  $k \leq m$  le théorème est conséquence de résultats antérieurs (théorème de compression (1)), à l'exception de l'injectivité en dimension  $m$  est un cas particulier et ressort de l'argument ci-dessous.

On suppose donc que  $k \geq m + 1$ .

**Lemme 3.1** *On peut supposer que les applications affines (de  $\mathbf{R}^k$  à valeurs dans  $\mathbf{R}^{m+1}$ ) considérées ci-dessus sont surjectives.*

Soit l'unique application affine  $\Delta^k \rightarrow \mathbf{R}^{m+1}$ , déterminée par la donnée des images des  $k+1$  sommets de  $\Delta^k$ . Un argument classique montre que l'ensemble des familles de  $(k+1)$ -points pour lesquelles l'application est surjective est un ouvert partout dense de  $(\mathbf{R}^{m+1})^{k+1}$ . On étend aisément à une famille finie de simplexes (intersection finie d'ouverts partout denses).

L'image inverse  $F$  par  $f : (\Delta^k, \partial\Delta^{k-1}) \rightarrow (X, A)$  de  $q$  est donc un sous-espace (polyèdre) compact contenu dans une réunion de sous-espaces affines de dimension  $k - m - 1$ . On note que  $q \notin F$ .

Considérons le cône  $S \subset \Delta^k$  qui est réunion de tous les segments d'origine le point base  $x_0$  et passant par un point de  $F$ . C'est un sous-ensemble compact dans une réunion de sous-espaces affines (de  $\mathbf{R}^k$ ) de dimension  $k - m$ .

Soit maintenant le sous-espace  $S' = f(S) \cap (\coprod d_\alpha^{m+1})$ . Sur  $f^{-1}(\coprod d_\alpha^{m+1})$   $f$  est affine par morceaux, donc  $S'$  est contenu dans une réunion de sous-espaces affines de dimension  $k - m$ . Mais  $S'$  est un sous-ensemble d'une réunion disjointe d'espaces  $\mathbf{R}^{k-m}$ . Or on a  $k - m < n + 1$  par hypothèse, donc tout sous-ensemble d'intérieur non vide de  $d_\alpha^{m+1}$  ne peut être contenu dans  $S'$ . Donc dans chaque cellule  $d_\alpha^{m+1}$  il y a au moins un point qui n'est pas dans  $S'$ . On peut supposer que c'est  $p_\alpha$ .

Autrement dit l'image  $f(S)$  est contenue dans  $X \setminus \{p_\alpha\}$  qui se rétracte par déformation sur  $A$ .

Soit  $W'$  le sous-espace de  $\Delta^k$  constitué par la réunion des simplexes d'intersection non vide avec  $V$ ,  $V$  est contenu dans l'intérieur de  $W'$ . Soient  $W = W' \cap \partial\Delta^k$ , et  $T$  le cône sur  $W$ , on peut supposer (quitte à resubdiviser les simplexes) que  $f(T)$  ne rencontre pas les  $p_\alpha$ . De plus il est facile de voir que  $q \notin f(T \setminus S)$ .

On pose aussi  $\overset{\circ}{W} = W \setminus \partial W$ .

La rétraction linéaire sur le sommet  $x_0$  du cône détermine une homotopie qui évite les  $p_\alpha$

$$H : T \times I \rightarrow X$$

entre  $f|_T$  et l'application constante. Soit  $\partial W$  la frontière de  $W$  comme sous-espace de  $\partial\Delta^k$ , et  $\partial T$  le cône sur  $\partial W$ , *i.e.* la frontière de  $T$  dans  $\Delta^k$ . Sur le sous-espace  $\partial T \times I$   $H$  évite  $q$ .

L'application  $H \cup f$  (avec un abus de notation!) restreinte à

$$\partial T \times I \cup (\partial\Delta^k \setminus \overset{\circ}{W})$$

évite  $q$  et les  $p_\alpha$ . Comme l'inclusion

$$\partial T \times I \cup (\partial\Delta^k \setminus \overset{\circ}{W}) \subset (\partial T \cup \partial\Delta^k \setminus \overset{\circ}{W}) \times I$$

est une cofibration, on peut étendre  $H \cup f$  en une application de

$$(\partial T \cup \partial\Delta^k \setminus \overset{\circ}{W}) \times I \rightarrow X \setminus \{q; p_\alpha\}$$

Ensuite

$$(\partial T \cup \partial\Delta^k \setminus \overset{\circ}{W}) \times I \subset (\Delta^k \setminus \overset{\circ}{T}) \times I$$

est une cofibration, on peut étendre l'application cette fois-ci à valeurs dans  $X \setminus \{q\}$  car  $f$  restreinte à  $\Delta^k \setminus T$  évite  $q$  mais pas les  $p_\alpha$ .

L'application ainsi définie sur  $(\Delta^k \setminus \overset{\circ}{T}) \times I$  se recolle avec l'application sur  $T \times I$  le long de leur frontière commune  $\partial T \times I$ . Cela détermine en une homotopie à valeurs dans  $(X, X \setminus \{p_\alpha\})$  que l'on peut donc rétracter sur  $(X, A)$  et qui à son terme évite  $q$ , donc que l'on peut rétracter sur  $(B, C)$ .

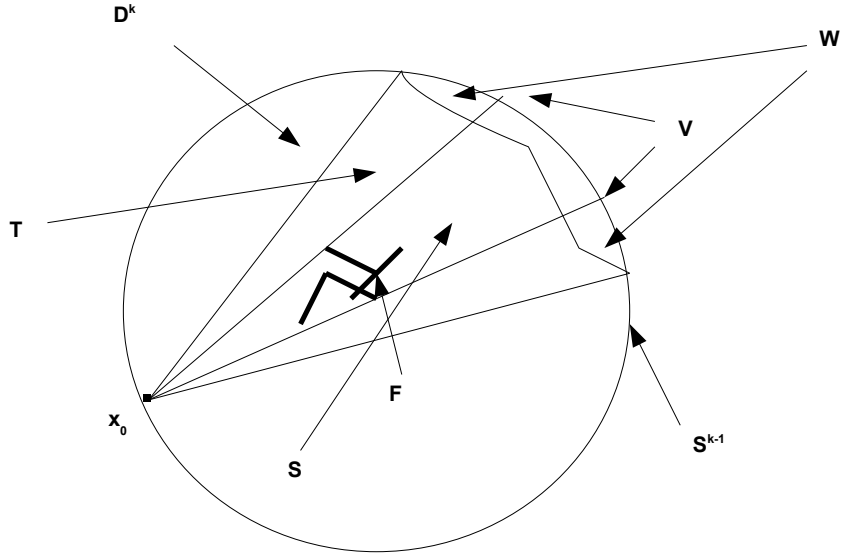


Figure 1: 1

Alternativement on peut (c'est essentiellement ce que fait Hatcher) choisir une fonction  $c: \partial\Delta^k \rightarrow [0, 1]$  qui vaut 1 sur  $V$ , 0 sur  $\partial\Delta^k \setminus W$ . On l'étend sur  $\Delta^k$  en lui demandant qu'elle soit constante sur chaque segment issu du point base  $x_0$ . Evidemment elle n'est pas définie en  $x_0$ ; on note que et on pose  $x_0 \notin W$  on pose  $c(x_0) = 0$ . Elle n'est pas continue en  $x_0$ .

L'homotopie donnée la formule :

$$f(c(v)tx_0 + (1 - c(v)t)v, c(v)t)$$

définie une homotopie qui a les propriétés requises sur  $\Delta^k \times I$ . En particulier on vérifie que l'application est continue en  $x_0 \times I$ .

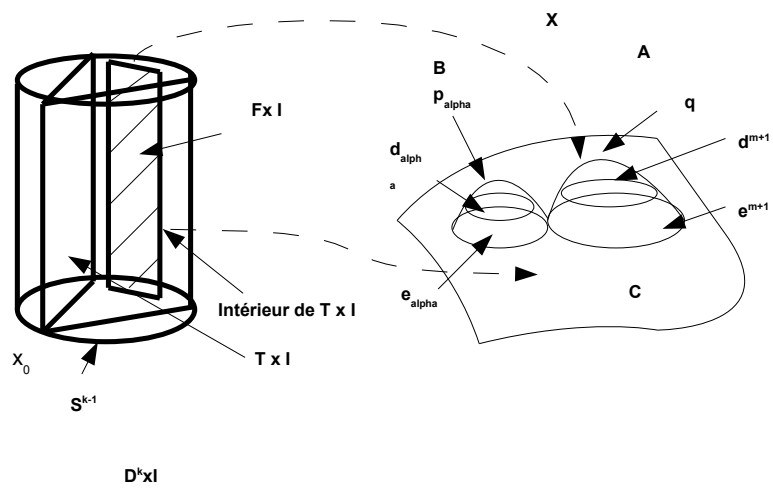


Figure 2: 1