Références pour le cours de M1 et exrcices

Références

- Topologie générale : topologie quotient, connexité par arcs, Godbillon, Eléments de Topologie algébrique (Hermann) Chapitre 1.
- Topologie : limite directe : M. Zisman, Topologie algébrique élémentaire Chapitre 3, section 2; G. Whitehead, Elments of Homotopy theory Chapter 1, section 6; Spanier, Algebraic Topology Section 2.
- Topologie générale : Espaces fonctionnels, Spanier, Introduction, Section 2.; Whitehead, Chapter 1, section 4.
- Catégories : S. MacLane Categories for the working mathematician, Chapter 1, Chapter 1, Section 1 and 2, Chapter 4, Section 1 and 2; Spanier Chapter 1, Section 1 and 2.
- Groupe fondamental et revêtements : Godbillon, Parties 1 et 2;
- Gramain, Topologie des surfaces, chapitres 1 et 2;
- Zisman, chapitre 2 (groupode fondamental ou de Poincaré et théorème de Van Kampen);
- Whitehead, Chapter 3 sections 1 to 5;
- Spanier Chapters 1 and 2;
- Greenberg, Algebraic topology, Part 1.

Exercices

1. Ecrire la démonstration du lemme de Yoneda en détails : Soit F un foncteur d'une catégorie $\mathcal{C}$ vers la catégorie des ensembles. Soit $A \in \mathcal{C}$, alors il existe une bijection entre l'ensemble des transformations naturelles du foncteur

$$M \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, M)$$

vers le foncteur F et l'ensemble $F(A)$.

2. Vérifier en détails les propriétés de l'unité et de la co-unité de l'adjonction pour des foncteurs adjoints (voir MacLane).

3. Montrer que la sphère S^∞ est contractile.

4. Montrer que le quotient de $\mathbf{R}^n$ par un arc simple différentiable plongé (*i.e.* une image bijective lisse de $[0, 1]$ est homéomorphe à $\mathbf{R}^n$. On pourra se restreindre au cas linéaire.

5. Montrer que la smash-produit de S^n par S^m est homéomorphe à S^{n+m}.

6. Montrer que toute application continue de S^1 dans S^1 qui n'a pas de points fixes est homotope librement à l'identité.

7. On appelle cône d'un espace pointé (X, x_0) le quotient de $X \times [0,1]$ par la relation qui identifie en un point les points $(x, 1)$ $(\forall x \in X)$ et (x_0, t), $0 \leq t \leq 1$. Ce point sera le point base du cône. On le notera CX.

Montrer que l'application identité d'in cône est homotope (pointée) à l'application constante au point base (Un tel espace est dit contractile). En déduire que le groupe fondamental du cône est trivial.

8. On appelle suspension d'un espace pointé (X, x_0) le quotient de $X \times [0,1]$ par la relation qui identifie en un point les points $(x, 1)$, $(x, 0)$, $(\forall x \in X)$ et (x_0, t), $0 \leq t \leq 1$. Ce point sera le point base de le suspension. On notera ΣX la suspension de X. Montrer que ΣS^{n-1} est homéomorphe à S^n.

9. Soit P un polynôme à coefficients complexes qui n'a pas de racines sur S^1. Montrer que le nombre de racines de P (comptées avec multiplicité) de module strictement inférieur à 1 est le degré de l'application de S^1 dans S^1 donné par $z \mapsto \frac{P(z)}{|P(z)|}$.