

Références pour le cours de M1 et exercices

Références

- Groupe fondamental et revêtements : Hatcher Chapitre 1 Sections 1, 2 et 3.

Exercices

1. Théorème de Borsk-Ulam. Montrer que pour toute application f de S^2 dans \mathbf{R}^2 au moins deux points antipodaux ont même image. On raisonnera par l'absurde et on considèrera l'application

$$s \mapsto \frac{f(s) - f(-s)}{\|f(s) - f(-s)\|}$$

$s \in S^2$. On en considèrera la restriction à un équateur de la sphère, on montrera que cette restriction est non-triviale comme classe d'homotopie de S^1 dans S^1 .

2. Le théorème de Borsuk-Ulam a t'il lieu pour un tore?
3. Montrer que si S^2 est réunion de 3 fermés, l'un au moins contient 2 points antipodaux.
4. Montrer qu'un graphe est homotopiquement équivalent à un bouquet de cercles.
5. Montrer que si $A \subset X$ est rétracte par déformation de X , on a $\pi_1(A, x_0) \cong \pi_1(X, x_0)$, avec $x_0 \in A$.
6. Construire une infinité de rétractions non homotopes de $S^1 \vee S^1$ vers S^1 .
7. Soit un espace Y est de la forme suivante : $X \cup D^n /$, avec $n \geq 2$ et le quotient identifie tout point $x \in S^{n-1} \subset D^n$ avec son image $f(x)$ par une application $f : S^{n-1} \rightarrow X$. Alors $\pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, x_0)$ est surjectif. Que se passe t'il si $n \geq 3$?
8. Montrer que l'espace $S^1 \times S^1$ auquel on a enlevé un point est homotopiquement équivalent au bouquet de deux cercles.
9. Montrer que pour tout groupe G il existe un e'espace topologique X_G dont le groupe fondamental est isomorphe à G . Qu'en est il des π_n , $n \geq 2$?
10. Montrer que la suspension d'un espace connexe est simplement connexe.
11. Montrer que le sous-espace de \mathbf{R}^3 qui est réunion de sphères de rayon $\frac{1}{n}$ et de centre $(\frac{1}{n}, 0, 0)$ est simplement connexe.

12. Le joint $X * Y$ de deux espaces X et Y est le quotient de $X \times [0, 1] \times Y$ par la relation qui identifie

- à $x \in X$ donné, $(x, 0, y)$ et $(x, 0, y')$ pour tous $y, y' \in Y$;
- à $y \in X$ donné, $(x, 1, y)$ et $(x', 1, y)$ pour tous $x, x' \in X$.

Montrer que $S^n * S^m$ est homéomorphe à S^{n+m+1} .

Montrer que le joint de deux espaces est simplement connexe dès que l'un des espaces l'est.

Comparer le joint $X * Y$ avec $\Sigma X \wedge Y$.

13. Montrer que la suspension de $\Sigma(X \times Y)$ est homotopiquement équivalente à

$$\Sigma X \vee \Sigma Y \vee \Sigma X \wedge Y$$

14. On appelle fibré de Hopf sur \mathbf{RP}^n , et on note λ_n , le sous-espace de $\mathbf{RP}^n \times \mathbf{R}^{n+1}$ constitué par les éléments (L, v) où L est un sous-espace de dimension 1 de \mathbf{R}^{n+1} et $v \in L$. On note p l'application de λ_n vers \mathbf{RP}^n qui à (L, v) associe L .

Montrer que $p^{-1}(\mathbf{RP}^n - \mathbf{RP}^{n-1})$ est homéomorphe à $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$.

On met sur \mathbf{R}^{n+1} le produit scalaire standard. Soit $D(\lambda_n)$ l'ensemble des (L, v) avec $|v| \leq 1$, et $S(\lambda_n)$ l'ensemble des (L, v) avec $|v| = 1$. Montrer que l'espace $D(\lambda_n)/S(\lambda_n)$ est homéomorphe à \mathbf{RP}^{n+1} .

Montrer que le compactifié d'Alexandroff de λ_n est homéomorphe à \mathbf{RP}^{n+1} .

15. Fibré tangent à \mathbf{RP}^n . On suppose connu dans cet exercice la notion de fibré tangent à une variété différentiable.

On note p la projection canonique de $T\mathbf{RP}^n \times \mathbf{R}$ sur \mathbf{RP}^n .

On rappelle l'espace λ_n et sa projection p sur \mathbf{RP}^n . On définit $(n+1)\lambda_n$ par

$$\{(L, v_1, \dots, v_{n+1}) \mid v_i \in L \ \forall i\}$$

on notera π la projection canonique sur \mathbf{RP}^n .

Montrer qu'il existe un homéomorphisme h de $T\mathbf{RP}^n \times \mathbf{R}$ avec $(n+1)\lambda_n$ tel que $\pi \circ \alpha = p$ - où α restreinte à $p^{-1}(x)$ est un isomorphisme linéaire sur $\pi^{-1}(x) \cong \mathbf{R}^{n+1}$ pour tout $x \in \mathbf{RP}^n$.

16. Décrire les revêtements 2 feuillets d'un bouquet de cercles.

17. Décrire le revêtement universel du bouquet d'un cercle et d'une sphère de dimension 2.

18. Donner le nombre de revêtements galoisiens à 6 feuillets d'un bouquet de deux cercles dont le groupe des automorphismes est commutatif, puis non commutatif. Donner quelques exemples dans chaque cas.

On observera que si on a un revêtement galoisien E d'un espace B le quotient de E par le sous-groupe à 3 éléments du groupe d'automorphismes est un revêtement galoisien à 2 feuillets de B . Puis on regardera les revêtements galoisiens à 3 feuillets d'un bouquet de trois cercles (faire l'analyse qui a été faite pour 2 feuillets).

19. Soit P un polynôme à coefficients complexes, de degré n . On considère le sous-ensemble \mathcal{S} suivant de $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$

$$\{(\alpha, u) \mid P(\alpha) = u\}$$

Soit D l'ensemble des complexes a pour lesquels le discriminant du polynôme $P - a$ est nul. Montrer que l'application $\pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbf{C}$, $(\alpha, u) \mapsto u$ définit un revêtement $\pi^{-1}(\mathbf{C} \setminus D) \rightarrow \mathbf{C} \setminus D$.

Décrire D .

Montrer que si on prend $P = z^k$ l'espace total obtenu est homotopiquement équivalent à un cercle. Qu'en est-il si on prend $P = z^2 - z$?

20. Soit Γ un graphe fini connexe. On définit les quantités suivantes : b_0 le nombre de sommets de Γ , b_1 le nombre d'arêtes de Γ , $\chi(\Gamma) = b_0 - b_1$, la connectivité de Γ , $c(\Gamma)$ qui est le plus grand nombre d'arêtes ouvertes que l'on peut enlever à Γ en le laissant connexe.

Montrer par récurrence que

$$\chi(\Gamma) = 1 - c(\Gamma)$$

Montrer que le groupe fondamental de Γ a $c(\Gamma)$ générateurs.

Soit Γ de connectivité n et $\tilde{\Gamma}$ un revêtement connexe à m -feuillets. Quelle est sa connectivité?

Démontrer qu'un sous-groupe distingué non-trivial H d'un groupe libre qui est d'indice infini ne peut être finiment engendré.

21. Quel est le revêtement universel de $\text{SO}(3)$? Quel est le revêtement universel de $\text{SO}(4)$?

22. Démontrer qu'un sous-groupe distingué non-trivial H d'un groupe libre qui est d'indice infini ne peut être finiment engendré.