

Exercices

6. Calculer $\pi_1(U(n))$. On pourra commencer par montrer que $U(n)$ est homéomorphe à $S^1 \times SU(n)$, puis étudier $\pi_1(SU(n))$. On pourra utiliser la longue suite exacte étudiée en 5. On peut aussi chercher à appliquer le théorème de Van Kampen en décomposant $SU(n)$ en deux sous-espaces homéomorphes à $SU(n-1) \times e^{2n-1}$ (e^{2n-1} est la boule ouverte de dimension $2n-1$). Pour ce faire on utilisera l'application $SU(n-1) \rightarrow S^{2n-1}$ qui à A associe Ae_1 (e_1 est le premier vecteur de la base canonique).

Le premier homomorphisme est obtenu en considérant l'application qui envoie une matrice A vers le couple formé du déterminant et de la matrice dont on a multiplié la dernière colonne par le conjugué du déterminant. Ce n'est évidemment pas un homomorphisme.

Pour ce qui est du second soit $v \in S^{2n-1}$, $v \neq e_1$, le vecteur $v - e_1$ est non nul, on va construire une transformation unitaire qui sera la multiplication par un scalaire λ sur la droite complexe et l'identité sur l'orthogonal, λ est déterminé par la condition que cette transformation doit envoyer e_1 sur v .

On calcule $e_1 = \frac{\langle e_1, v \rangle - 1}{\|v - e_1\|^2}(v - e_1) + u$, avec u orthogonal à $v - e_1$. Donc on doit avoir

$$v = \lambda \frac{\langle e_1, v \rangle - 1}{\|v - e_1\|^2}(v - e_1) + u = \lambda \frac{\langle e_1, v \rangle - 1}{\|v - e_1\|^2}(v - e_1) + e_1 - \frac{\langle e_1, v \rangle - 1}{\|v - e_1\|^2}(v - e_1)$$

soit

$$v = (\lambda - 1) \frac{\langle e_1, v \rangle - 1}{\|v - e_1\|^2}(v - e_1) + e_1$$

soit

$$\lambda = 1 + \frac{\|v - e_1\|^2}{\langle e_1, v \rangle - 1}$$

L'application qui à v associe cette transformation est une section de p au-dessus de $S^{2n-1} \setminus \{p\}$, mais a des valeurs dans $U(n)$. En multipliant la dernière colonne par le conjugué du déterminant on obtient une section $v \mapsto s - v$ a des valeurs dans $SU(n)$. Cette application est continue.

L'homomorphisme demandé est alors donné par $A \mapsto (s_{Ae_1}^{-1} \circ A, Ae_1)$.

Remplaçant e_1 par $-e_1$ on a un résultat analogue, et $U(n)$ est l'union des deux ouverts (dont on vérifie que l'intersection est connexe!) dont le groupe fondamental est trivial, pourvu que l'on sache le résultat pour $U(n-1)$. On peut alors appliquer le théorème de Van Kampen pour montrer que le groupe fondamental de $U(n)$ est trivial. Pour amorcer la récurrence on rappelle que $SU(2) \cong S^3$.

7. Décrire une structure de groupe topologique abélien sur \mathbf{RP}^∞ et sur \mathbf{CP}^∞ .

7. Calculer $\pi_1(SO(n))$. On commencera par montrer que $SO(3)$ est homéomorphe à \mathbf{RP}^3 . Puis on procédera comme dans l'exercice précédent.

8. Le tore (ou bouteille) de Klein est la quotient de \mathbf{R}^2 par le sous-groupe G des applications affines engendrées par $a : (x, y) \mapsto (-x, y + 1)$ et $b : (x, y) \mapsto (x + 1, y)$.

8.1 $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2/G$ est un revêtement.

Il faut montrer que l'action de G est propre et libre. Pour ce faire on doit commencer d'crire G plus concrètement. On observe que l'on a la relation $bab = a$ (et non $= b!$), ce qui permet d'crire tout lment de $g \in G$ sous la forme $a^k b^\ell$ ou $a^h b^i$. Donc $g((x, y)) = (-, y + i)$, si un point (x, y) est un point fixe on a $h = 0$, puis $b^k((x, y)) = (x, y)$ implique $k = 0$. Cet argument montre aussi que l'criture $g = a^h b^i$ est unique.

L'action est propre, en effet $K \cap gK$ (K compact) est vide ds que i et h sont assez grands ($g = a^h b^i$).

8.2 Le sous-groupe $\Gamma \subset G$ engendré par b est normal et que $G/\Gamma \cong \mathbf{Z}$. On a $aba^{-1} = b^{-1}$, le premier rsultat suit. Puis a^2 est la translation $(x, y) \mapsto (x, y + 2)$, donc le sous-groupe engendr par a^2 et b est isomorphe \mathbf{Z}^2 et est distingu dans G . Le quotient est $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ engendr par la classe de a . On en dduit que le quotient H de G par $\langle b \rangle$ est isomorphe \mathbf{Z} .

8.2 Les sous-groupes de G sont dcrits comme suit :

- soit ils se projettent dans H avec noyau trivial, ils sont alors cycliques cyclique, engendré par un élément $a^m b^n$ ($m \neq 0$), on notera $H_{m,n}$, soit ils sont d'image triviale et engendrs par b^n , on notera $H_{0,n}$;
- soit il sont d'image non triviale dans H , avec un noyau non trivial, et ont donc des générateurs $a^m b^n$ et b^p , avec $n \neq 0$, $p > 0$, on peut supposer $0 \leq n < p$, on notera $K_{m,n,p}$.

8.2 Les sous-groupes considrs sont distingués si et seulement si $m \cong 0(2)$. La première implication est dmontre plus haut. La seconde se dmontre en tablissant les relations $a^m b^n = b^{(-1)^m n} a^m$, puis $(b^n a^m)^k = b^{n(\alpha(m,n,k))} a^{km}$ avec $\alpha(m, n, k) = k$ si $m \cong 0$ modulo 2; sinon $\alpha(m, n, 2\ell) = 0$ et $\alpha(m, n, 2\ell + 1) = 1$. Dans ce dernier cas (m impair) considrant le conjugu $b(a^m b^n) b^{-1} = ab^{m+2}$ on constate qu'il ne peut tre de la forme $b^{n(\alpha(m,n,k))} a^{km}$, ce pour tout k (le mme argument s'tend la seconde classe de sous-groupes).

Les espaces quotients $\mathbf{R}^2/H_{m,n}$ sont de la forme $S^1 \times \mathbf{R}$ (m pair) soit le ruban de Mobius (m impair) : si m est pair le quotient est fait par le sous-groupe engendr par la translation $a^m b^n$, si m est impair on commence par le quotient par la translation $(a^m b^n)^2 = a^{2m}$ (on obtient $S^1 \times \mathbf{R}$), puis le quotient par l'action de la classe de a . Dans le cas de $\mathbf{R}^2/K_{m,n,p}$ on trouve le tore si $m \cong 0$ modulo 2 et on retrouve la bouteille de Klein sinon.

Pour vrifier ces points en dtails on procde comme suit. Par exemple pour m impair on considere le ruban compris entre l'ordonne m et l'ordonne $-m$, ceci tient compte de l'action de a^{2m} , puis on examine les identifications effectuer dans le ruban, tenant compte de l'action de $a^m b^n$, soit $(x, y) \mapsto (-x - n, y + m)$.