Exercices

1.

1.1 Démontrer qu'une fibration de Serre vérifie la propriété de relèvement relative suivante.

Si on a une application H définie sur $D^n \times I$ à valeurs dans B qui se relève sur le sous-espace $D^n \cup S^{n-1} \times I$ en $G : S^{n-1} \times I \longrightarrow E$ telle que $p \circ G = H_{D^n \cup S^{n-1} \times I}$. Alors il existe $\tilde{H} : D^n \times I \longrightarrow E$ telle que $p \circ \tilde{H} = H$ et $\tilde{H}_{D^n \cup S^{n-1} \times I} = G$.

1.2 Soit Y obtenu à partir de X par attachement d'une n-cellule. Démontrer qu'une fibration de Serre vérifie la propriété de relèvement relative dans le sens suivant. Si on a une application H définie sur $Y \times I$ à valeurs dans B qui se relève sur le sous-espace $Y \cup X \times I$ en $G : X \times I \longrightarrow E$ telle que $p \circ G = H_{Y \cup X \times I}$. Alors il existe $\tilde{H}$ de $Y \times I : E$ telle que $p \circ \tilde{H} = H$ et $\tilde{H}_{Y \cup X \times I} = G$.

1.3 Soit (X, A) une CW-paire. Démontrer qu'une fibration de Serre vérifie la propriété de relèvement suivante : si on a une application H définie sur $X \times I$ à valeurs dans B qui se relève sur le sous-espace en $G : X \cup A \times I \longrightarrow E$ telle que $p \circ G = H_{X \cup A \times I}$ alors il existe $\tilde{H}$ de $X \times I \longrightarrow E$ telle que $p \circ \tilde{H} = H$ et $\tilde{H}_{X \cup A \times I} = G$.

3. Soit $p : E \longrightarrow B$ une fibration localement triviale. C'est-à-dire qu'il existe un espace F tel que pour tout $b \in B$ il existe un voisinage V_b pour lequel $p^{-1}(V_b)$ est homéomorphe à $V_b \times F$, l'homéorphisme commutant au projections sur V_b. Démontrer qu'une fibration localement triviale est une fibration de Serre.

4.1 Démontrer qu'il existe une suite exacte longue (on a omis les points base dans les groupes d'homotopie, le point base pour B est b):

$$\ldots \longrightarrow \pi_n(F_b) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F_b) \longrightarrow \ldots$$

Dans cette suite i et p sont l'inclusion et la projection.

Soit on montrera que cette suite exacte s'identifie à la suite exacte de la paire (E, F), soit on procédera directement comme suit. L'application ∂ est définie par : soit $\alpha : (D^n, S^{n-1}) \longrightarrow (B, b)$ et un relèvement à E. par construction l'image de S^{n-1} est dans F_b. On montrera que ceci est bien défini.

4.2 Soit G un groupe de Lie et H un sous-groupe fermé. Montrer que si H est un sou-groupe de Lie l'application $G \longrightarrow G/H$ est une fibration localement triviale (utiliser l'exponentielle). La condition "H sous-groupe de Lie" est elle nécessaire?

5.3 Soit l'application de Hopf de S^3 dans S^2, obtenue en considérant S^2 comme le quotient de $S^3 \subset \mathbf{C}^2$ par l'action des nombres complexes de module 1. Déduire de la suite exacte précédente qu'elle est homotopiquement non triviale. Trouver des applications analogues de ^{7} dans S^4 et S^15 dans S^8.