M1 Algebraic Topology, exercices

1. On appelle cône d'un espace pointé (X, x_0) le quotient de $X \times [0,1]$ par la relation qui identifie en un point les points $(x, 1)$ $(\forall x \in X)$ et (x_0, t), $0 \leq t \leq 1$. Ce point sera le point base du cône. On le notera CX.
Montrer que l'application identité d'in cône est homotope (pointée) à l'application constante au point base (Un tel espace est dit contractile).

2. On appelle suspension d'un espace pointé (X, x_0) le quotient de $X \times [0,1]$ par la relation qui identifie les points $(x, 1)$, $(x, 0)$, $(\forall x \in X)$ et (x_0, t), $0 \leq t \leq 1$ en un point. Ce point sera le point base de la suspension. On notera ΣX la suspension de X. Montrer que ΣS^{n-1} est homéomorphe à S^n.
On pourra commencer par montrer le résultat pour la suspension non réduite quotient de $X \times [0,1]$ par la relation qui identifie d'un côté les points $(x, 0)$, $\forall x \in X$ et d'un autre les points $(x, 0)$, $\forall x \in X$ puis utiliser l'exercice 15.

3. On définit la sphère S^∞ comme étant la réunion des sphères S^n *via* les inclusions

$$S^n \hookrightarrow S^{n+1} \quad (x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \ldots, x_{n+1}, 0)$$

On munit cet espace de la la topologie limite directe. Un ensemble U est ouvert (fermé) dans S^∞ si et seulement si son intersection avec chacun des S^n est ouverte (fermée).
Montrer qu'une application de S^∞ dans un espace topologique X est continue si et seulement si sa restriction à chaque S^n est continue.
Montrer que tout sous-ensemble compact de S^∞ est contenu dans un S^n pour un n assez grand.

4. Montrer que la sphère S^∞ est contractile.
Pour ce faire on commencera par montrer par montrer que l'identité de S^∞ est librement homotope à l'application induite par le "décalage", c'est à dire l'application qui est la restriction à S^∞, de l'application linéaire donnée par $s(e_i) = e_{i+1}$ sur les vecteurs de la base canonique.
Puis on utilisera l'exercice 15.

5.1. On considère les groupes $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ et $U(n)$ comme des sous-espaces de $M_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{n^2}$. Montrer que ce sont des espaces connexes. Montrer que $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ est ouvert et dense dans $M_n(\mathbb{C})$. Montrer que $U(n)$ est compact.

5.2. Montrer que $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ est homéomorphe à $U(n) \times \mathbb{R}^{n^2}$.

6. Montrer que le groupe $U(n)$ est homéomorphe à $S^1 \times SU(n)$.
7. Formuler et démontrer les résultats analogues pour les groupes $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ et $O(n)$.

8. Montrer que le groupe $SU(2)$ est homéomorphe à S^3.

9. En utilisant les quaternions montrer que le groupe $SO(3)$ est le quotient de la sphère S^3 obtenu en identifiant en un point chaque paire de points antipodaux. On identifiera S^3 au groupe des quaternions de module 1.
Donner une identification analogue pour $SO(4)$ à partir de $S^3 \times S^3$.

10. On considère l'action du groupe des nombres complexes de module 1 sur la sphère $S^3 \subset \mathbb{C}^2$. Montrer que l'espace quotient est homéomorphe à la sphère S^2.

11. Montrer que l'espace topologique $TS^2 \subset S^2 \times \mathbb{R}^3$

$$\{(v,w)|v \in S^2 \;\; w \in R^3, \;\; |w| = 1, \;\; \text{et} \;\; < v|w >= 0\}$$

est homéomorphe à $SO(3)$. Dans la formule plus haut $< v|w >$ désigne le produit scalaire usuel.

12. Un groupe topologique G est un espace topologique munit d'une loi interne qui en fait un groupe et qui est continue (on demande aussi que l'inverse soit continue).
On considère le groupe fondamental $\pi_1(G,e)$. Montrer qu'on peut le munir d'une (*a priori* autre) loi en définissant le produit de deux lacets par $\gamma(t)\lambda(t)$ en utilisant le produit du groupe.
Montrer que ce produit coïncide avec la loi usuelle. En déduire que dans ce cas le groupe fondamental est commutatif.

13. Un H-espace X est un espace topologique munit d'une loi interne continue $* : X \times X \to X$ et d'une unité à homotopie prés. C'est à dire qu'il existe $e \in X$ tel que les applications $x \mapsto x$, $x \mapsto e * x$, $x \mapsto x * e$ soient homotopes (pointées, on suppose donc que $e * e = e$).
Montrer que sous ces hypothèses les résultats de l'exercice précédent sont valides.

14. On définit l'espace projectif réel infini $\mathbb{RP}^\infty$ comme étant la réunion des espaces projectifs $\mathbb{RP}^n$ *via* les inclusions $\mathbb{RP}^n \to \mathbb{RP}^{n+1}$

$$(x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \ldots, x_{n+1}, 0)$$

On munit cet espace de la la topologie limite directe. Montrer que $\mathbb{RP}^\infty$ est un H-espace.
Montrer le même résultat pour $\mathbb{CP}^\infty$ que l'on définira.
Montrer que c'est même un groupe topologique abélien.

15. On considère l'espace D^n (la boule fermée de rayon 1 dans $\mathbb{R}^n$) et C un arc simple de classe C^1 dans D^n. On rappelle qu'un arc simple est l'image du segment $[0,1]$ par une application continue injective. Montrer que l'espace quotient D^n/C est moméomorphe à D^n, on pourra commencer par étudier le cas où l'arc est un segment de droite. Montrer le même résultat en remplaçant D^n par $\mathbb{R}^n$, S^n ou une variété différentiable.

16. Montrer que l'espace $S^1 \times S^1$ auquel on a enlevé un point est homotopiquement équivalent au bouquet de deux cercles (deux cercles où l'on a identifié un point de l'un des cercles avec un point de l'autre, soit la figure "8" dans le plan).

17. On considère l'espace $\Omega(X)$ des lacets pointé d'un espace pointé (X, x_0). C'est-à-dire l'ensemble des applications continues γ de $[0,1]$ dans X d'origine et fin x_0. On munit cet espace de la topologie dont une base d'ouverts est définie comme suit. On se donne un compact K dans $[0,1]$ et un ouvert U dans X, on définit $C(K,U)$ comme l'ensemble des chemins γ tels que $\gamma(K) \subset U$.
Si X est une espace métrique montrer que cette topologie est celle de la convergence uniforme.

Montrer que ceci définit une topologie sur $\Omega(X)$. Montrer que $\Omega(X)$ est un H-espace. Montrer que

$$\pi_0(\Omega(X)) \cong \pi_1(X, x_0)$$

18. Montrer que toute application continue de S^1 dans S^1 qui n'a pas de points fixes est homotope librement à l'identité. On considérera les arcs joignant un point à son image, orientés dans le sens trigonométrique.

19. Soit P un polynôme à coefficients complexes qui n'a pas de racines sur S^1. Montrer que le nombre de racines de P (comptées avec multiplicité) de module strictement inférieur à 1 est le degré de l'application de S^1 dans S^1 donné par $z \mapsto \frac{P(z)}{|P(z)|}$.

20. Montrer que $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^n$, $n > 2$, ne sont pas homéomorphes.