M1 Algebraic Topology, exercices, feuille 2

1. Soit $p : SU(n) \longrightarrow S^{2n-1}$ qui à A associe Ae_1 (e_1 est le premier vecteur de la base canonique). Montrer que $p^{-1}(S^{2n-1}\backslash\{e_1\})$ est homéomorphe à $SU(n-1) \times (S^{2n-1}\backslash\{e_1\})$. Etablir un résultat analogue pour $SO(n)$.

2. Montrer qu'un graphe est homotopiquement équivalent à un bouquet de cercles.

3. Montrer que l'espace $S^1 \times S^1$ auquel on a enlevé un point est homotopiquement équivalent au bouquet de deux cercles.

4. Montrer que la suspension d'un espace connexe est simplement connexe (sans utiliser Van Kampen).

5. Montrer que le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ qui est réunion de sphères de rayon $\frac{1}{n}$ et de centre $(\frac{1}{n}, 0, 0)$ est simplement connexe.

6. Soient le sous-espace T^+ de $\mathbb{R}^2$ qui est réunion de sphères de rayon $\frac{1}{n}$ et de centre $(\frac{1}{n}, 0)$, T^- de $\mathbb{R}^2$ qui est réunion de sphères de rayon $\frac{1}{n}$ et de centre $(\frac{-1}{n}, 0)$. Soient $C^+ \subset \mathbb{R}^3$ le cône de sommet $A = (0, 0, 1)$ de base C^+, $C^- \subset \mathbb{R}^3$ le cône de sommet $B = (0, 0, -1)$ de base C^-. L'espace $T^+ \cup C^-$ est il simplement connexe.

7. Le joint $X * Y$ de deux espaces X et Y est le quotient de $X \times [0, 1] \times Y$ par la relation qui identifie

- à $x \in X$ donné, $(x, 0, y)$ et $(x, 0, y')$ pour tous $y, y' \in Y$;
- à $y \in X$ donné ,$(x, 1, y)$ et $(x', 1, y)$ pour tous $x, x' \in X$.

Montrer que $S^n * S^m$ est homéomorphe à S^{n+m+1}.
8. Comparer le joint $X * Y$ avec $\Sigma X \wedge Y$.

9. Montrer que la suspension de $\Sigma(X \times Y)$ est homotopiquement équivalente à

$$\Sigma X \vee \Sigma Y \vee \Sigma X \wedge Y$$

10. On considère l'ensemble $X \subset \mathbb{R}$ défini par $X = \{0, \frac{1}{n},\ n > 0\}$. Soit $i = [0, 1]$. Montrer que l'on peut trouver un espace Z et une application continue $h : \{0\} \times I \cup \frac{1}{n},\ n > 0\} \longrightarrow Z$ qui ne peut se prolonger continument à $X \times I$.

11. On considère l'espace $X \subset \mathbb{R}^2$ défini comme la réunion des segments

- Fermé, compris entre les points A de coordonnées $(0, 1)$ et B de coordonnées $(0, -1)$.
- Compris entre les points A et C_n de coordonnées $(0, \frac{1}{n})$, C_n exclu.
- Compris entre les points B et C_n de coordonnées $(0, \frac{-1}{n})$, C_n exclu.

Montrer que cet espace n'est pas contractile. On pourra se commencer par montrer qu'il n'existe pas d'homotopie basée en $(0,0)$ entre l'identité et l'application constante.
Montrer que le groupe fondamental est trivial.

12. On appelle fibré de Hopf sur $\mathbb{RP}^n$, et on note λ_n, le sous-espace de $\mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ constitué par les éléments (L, v) où L est un sous-espace de dimension 1 de $\mathbb{R}^{n+1}$ et $v \in L$. On note p l'application de λ_n vers $\mathbb{RP}^n$ qui à (L, v) associe L.
Montrer que $p^{-1}(\mathbb{RP}^n - \mathbb{RP}^{n-1})$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.
On met sur $\mathbb{R}^{n+1}$ le produit scalaire standard. Soit $D(\lambda_n)$ l'ensemble des (L, v) avec $|v| \leq 1$, et $S(\lambda_n)$ l'ensemble des (L, v) avec $|v| = 1$. Montrer que l'espace $D(\lambda_n)/S(\lambda_n)$ est homéomorphe à $\mathbb{RP}^{n+1}$.
Montrer que le compactifié d'Alexandroff de λ_n est homéomorphe à $\mathbb{RP}^{n+1}$.

13. Fibré tangent à $\mathbb{RP}^n$. On suppose connu dans cet exercice la notion de fibré tangent à une variété différentiable.
On note p la projection canonique de$T\mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}$ sur $\mathbb{RP}^n$.
On rappelle l'espace λ_n et sa projection p sur $\mathbb{RP}^n$. On définit $(n+1)\lambda_n$ par

$$\{(L, v_1, \dots, v_{n+1}) |\, v_i \in L \ \ \forall i\}$$

on notera π la projection canonique sur $\mathbb{RP}^n$.
Montrer qu'il existe un un homéomorphisme h de $T\mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}$ avec $(n+1)\lambda_n$ tel que $\pi \circ \alpha = p$ - où et α restreinte à $p^{-1}(x)$ est un isomorphisme linéaire sur $\pi^{-1}(x) \cong \mathbb{R}^{n+1}$ pour tout $x \in \mathbb{RP}^n$.
14. Montrer que que le complémentaire d'un nombre fini de points dans $\mathbb{R}^n$ est simplement connexe si $n \geq 3$.

15. Montrer que le joint deux espaces, dont l'un est connexe est simplement connexe.

16. Calculer $\pi_1(U(n))$.

17. Soit Γ un graphe fini connexe. On définit les quantités suivantes : b_0 le nombre de sommets de Γ, b_1 le nombre d'arêtes de Γ, $\chi(\Gamma) = b_0 - b_1$, la connectivité de Γ, $c(\Gamma)$ qui est le plus grand nombre d'arêtes ouvertes que l'on peut enlever à Γ en le laissant connexe.
Montrer par récurrence que

$$\chi(\Gamma) = 1 - c(\Gamma)$$

Montrer que le groupe fondamental de Γ a $c(\Gamma)$ générateurs.
Soit Γ de connectivité n et $\tilde{\Gamma}$ un revêtement connexe à m-feuillets. Quelle est sa connectivité?

18. Démontrer qu'un sous-groupe distingué non-trivial H d'un groupe libre qui est d'indice infini ne peut être finiment engendré.

19. Décrire le revêtement universel du bouquet d'un cercle et d'une sphère de dimension 2.

20. Soit P un polynôme à coefficients complexes, de degré n. On considère le sous-ensemble $\mathcal{S}$ suivant de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$

$$\{(\alpha, u) | \ \ P(\alpha) = u\}$$

Soit D l'ensemble des complexes a pour lesquels le discriminant du polynôme $P - a$ est nul. Montrer que l'application $\pi : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbf{C}$, $(\alpha, u) \mapsto u$ définit un revêtement $\pi^{-1}(\mathbb{C} \backslash D) \longrightarrow \mathbb{C} \backslash D$.
Décrire D.
Montrer que si on prend $P = z^k$ l'espace total obtenu est homotopiquement équivalent à un cercle. Qu'en est il si on prend $P = z^2 - z$?