

# 1 Les tours de Postnikov

On veut démontrer le

**Théorème 1.1** *Soit  $X$  un CW-complexe connexe, il existe une suite de CW-complexes  $P_n X$  et d'applications  $i_n : X \longrightarrow P_n X$ ,  $p_n : P_n X \longrightarrow P_{n-1} X$  telles que*

- $i_{n-1} = p_n \circ i_n$ ;
- $i_n$  induit un isomorphisme sur les groupes d'homotopie en dimension inférieure ou égale à  $n$ .

*De plus les espaces  $P_n X$  vérifiant ces propriétés sont bien définis à homotopie près.*

*Enfin on peut supposer que les applications  $p_n$  sont des fibrations. La fibre de  $p_n$  est un espace -dit d'Eilenberg-Mac Lane-  $K(\pi_n(X), n)$  dont tous les groupes d'homotopie sont triviaux, à l'exception du  $n$ -ième isomorphe à  $\pi_n(X)$ .*

## 2 Construction de $P_n X$

Le théorème de compression dit que si on attache à  $X$  des cellules de dimension strictement supérieure à  $n + 1$  on ne modifie pas les groupes d'homotopie en dimension inférieure ou égale à  $n$ . Il suffit donc d'attacher des  $n + 2$ -cellules pour tuer les générateurs du  $\pi_{n+1}(X)$  et obtenir ainsi un espace  $X \langle n + 1 \rangle$  et une application  $X \longrightarrow X \langle n + 1 \rangle$  qui induit un isomorphisme sur les  $\pi_k$  si  $k \leq n$ , de plus  $\pi_{n+1}(X \langle n + 1 \rangle) = \{0\}$ . On itère cette construction en attachant à  $X \langle n + 1 \rangle$  des  $n + 3$ -cellules pour tuer  $\pi_{n+2}(X \langle n + 1 \rangle)$  sans modifier les groupes d'homotopie inférieurs...

On obtient donc en général un espace  $X \langle n + 1, m \rangle$ ,  $m \geq n + 1$ , dont les groupes d'homotopie  $\pi_k$  sont nuls si  $n + 1 \leq k \leq m$  et une application  $X \longrightarrow X \langle n + 1, m \rangle$  qui induit un isomorphisme sur les  $\pi_k$  si  $k \leq n$ . Les applications  $X \langle n + 1, m \rangle \longrightarrow X \langle n + 1, m + 1 \rangle$  sont des inclusions car on passe de  $X \langle n + 1, m \rangle$  à  $X \langle n + 1, m + 1 \rangle$  par attachement de  $m + 2$ -cellules. La réunion  $\bigcup_m X \langle n + 1, m \rangle$  est un modèle pour  $P_n X$ .

## 3 Construction des applications

Par construction on a des inclusions  $i_n : X \longrightarrow P_n X$ . Il reste à construire des applications

$$p_n : P_n X \longrightarrow P_{n-1} X$$

Pour cela on rappelle que  $P_n X$  est obtenu à partir de  $X$  par attachement de  $k$ -cellules,  $k \geq n + 2$ . On a donc des applications d'attachement  $S^{n+1} \longrightarrow X$ ,  $S^{n+2} \longrightarrow X \langle n + 1 \rangle$ ,  $\dots$ ,  $S^{m+1} \longrightarrow X \langle n + 1, m \rangle$ ,  $\dots$

Comme  $\pi_{n+1}(P_{n-1} X) = \{0\}$  la composée de toute application d'attachement

$$\alpha : S^{n+1} \longrightarrow X$$

avec  $i_{n-1}$  est homotopiquement triviale. Soit  $h : (D^{n+2}, S^{n+1}) \longrightarrow P_{n-1} X$  une homotopie. Par définition de l'attachement  $i_{n-1}$  se prolonge à  $X \cup e^{n+2}$ ,  $h$  déterminant l'application sur  $e^{n+2}$ . On peut clairement itérer ce processus pour construire  $p_n$ .

Cet argument montre aussi que si on a deux CW-complexes pour  $P_n X$  et  $P'_n X$  vérifiant les hypothèses on peut construire une application  $P_n X \longrightarrow P'_n X$  qui induit un isomorphisme sur les groupes d'homotopie, et est donc une équivalence d'homotopie.

Enfin la procédure standard permet de remplacer  $p_n$  par des fibrations.