1 Ensembles relatifs et compression

Les notes ci dessous suivent Hatcher de près.

Soit (X, A) une paire, X est de point base x_0. L'ensemble $\pi_n(X, A, x_0)$ est l'ensemble des classes d'homotopie d'applications (basées) de paires $h : (D^n, S^{n-1}) \longrightarrow (X, A)$. Les homotpies H doivent donc être basées et telles que $H(S^{n-1} \times I) \subset A$. L'application constante envoie le pont base de D^n (un pôle p par exemple) sur x_0 est l'élément "trivial de cet ensemble.

Il y a d'autres façons (équivalentes) de définir les ensembles relatifs (par exemple à parir de I^n et de son bord, chacune à ses avantages et ses inconvénients. L'ensemble $\pi_n(X, A; x_0)$ est un groupe si $n \geq 2$, abélien si $n > 2$. Il n'y a pas de définition du π_0. Dans la mesure où dans la suite on ne se sert pas (ou peu) de la strucuture de groupe la définition ci-dessus semble la plus commode.

Soit (X, A) une CW-paire et (Y, B) une paire, X est de point base x_0, Y de pont base y_0. Soit $h : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ une application continue basée de paires.

Théorème 1.1 *On suppose que pour tout entier $n \geq 1$ pour lequel la paire (X, A) a des cellules ouvertes de dimension n les ensembles (groupes si $n \geq 2$) d'homotopie relatifs $\pi_n(X, A; x_0)$ sont triviaux. Alors l'application peut être continument déformée en une application dans B, la déformation laissant A fixe (on dit rel. A).*

On aura besoin de :

Lemme 1.2 *Une application $h : (D^n, S^{n-1}) \longrightarrow (X, A)$ représente l'élément trivial dans $\pi_n(X, A; x_0)$ si et seulement si elle est homotope rel. S^{n-1} à une application à valeurs dans A.*

Il est d'abord facile de voir qu'une application de ce dernier type est homotope à l'application constante, simplement parce que D^n est convexe et se rétracte par déformation sur un pôle p. Donc si on a pu déformer h une application à valeurs dans A, on peut dans un second temps la déformer en l'application constante car l'image de D^n est dans A, et donc l'homotopie utilisant la convexité de D^n reste dans A.

Dans l'autre sens la difficulté est que *a priori* l'homotopie "bouge" sur S^{n-1}. Mais on procède comme indiquée par la figure ci dessous pour obtenir une homotopie fixe sur S^{n-1}. La nappe représentée détermine l'homotopie à l'instant u, la phase terminale ($t = 1$) est représentée par le bord et le socle du cylindre. Le méridien P correspond au point base. La valeur de cette homotopie sur S^{n-1} est donc à tout instant u celle sur le bord du couvercle du cylindre.

La seconde figure montre comment interpréter ceci en termes "homotopiques standards" à l'aide d'une application du cylindre dans lui même, cette application envoie les parties notées I, II, III et IV du bord à gauche sur les parties correspondantes à droite. En particulier le cylindre creux $S^{n-1} \times I$ est envoyé par projection sur S^{n-1} et l'anneau sur le socle (partie II) est envoyé sur $S^{n-1} \times I$ à droite.

L'application est prolongée radialement.

On passe à la démonstration du théorème. On procède par récurrence sur les cellules. On suppose donc que l'on a fait une homotopie $H(k-1) : X \times I \longrightarrow Y$ qui est fixe sur A, et qui envoie X^{k-1} dans B. Quitte à reprarmétriser on peut supposer cette homotopie effectuée sur l'intervalle $[0, 1 - \frac{1}{2^{k-1}}]$. On notera ci-dessous h_{k-1} pour $H(k-1)(-, 1 - \frac{1}{2^{k-1}})$, c'est-à-dire le terme de l'homotopie.

On passe de X^{k-1} à X^k par attachement de k-cellules. Si il n'y a pas de k-cellules on passe directement au cas des $(k+1)$-cellules. Supposons qu'il y en ait, soit e^k une telle cellule. On sait que $\pi_k(Y, B, x_0)$ est trivial, soit $\Phi : D^k \longrightarrow X^k$ l'application caractéristique de la cellule (la restriction à S^{k-1} est l'application d'attachement de la cellule à X^{k-1}. On peut par hypothèse déformer Φ, par une homotopie fixe sur S^{n-1}, en une application prenant valeurs dans B. Donc, par composition on peut déformer l'application h_{k-1} restreinte à $X_k \cup e^k$ en une application prenant valeurs dans B, la déformation restant fixe sur X_{k-1}. En effectuant ceci sur chaque k-cellule on déforme h sur X^k en une application prenant valeurs dans B, la déformation reste fixe sur X^{k-1}.

Cette homotopie, soit H_k, a été construite sur X^k, comme $X^k \subset X$ est une cofibration on peut l'étendre sur tout X. On la note encore H_k. On reparamétrise et on effectue cette homotopie sur l'intervalle

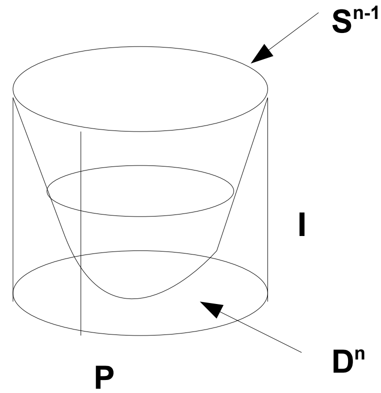

Figure 1: 1

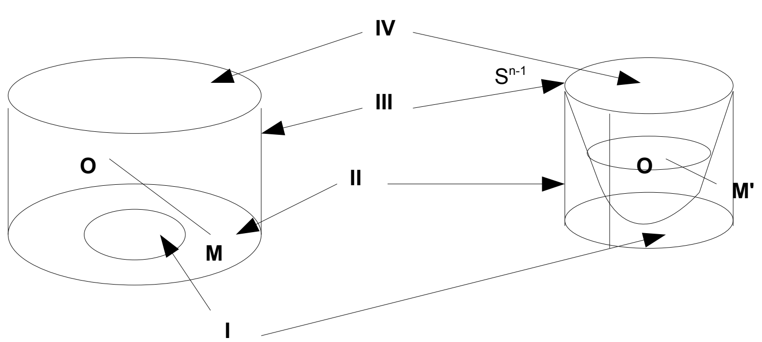

Figure 2: 1

$[1-\frac{1}{2^{k-1}}, 1-\frac{1}{2^k}]$, en recollant à $H(k-1)$ on obtient $H(k)$. Comme l'application finale de $X \times I$ dans Y est fixe sur X^k (pour tout k) hors de $[01-\frac{1}{2^{k-1}}]$ elle est continue. On obtient donc au terme de l'homotopie une application prenant valeurs dans B.

2 Cylindre d'une application

Définition 2.1 *Le cylindre* Cyl_f *de* $f : X \longrightarrow Y$ *est le quotient de* $X \times I \coprod Y$ *modulo la relation qui identifie* $(x,1)$ *avec* $f(x) \in Y$ *et* $((x_0,t)$ *avec* $f(x_0) = y_0$ *pour tout* t.

On inclut X dans Cyl_f *via* $x \mapsto (x,0)$. On suppose ci-dessous que les points bases sont non dégénérés.

Proposition 2.2 *Les inclusions* $X \bigvee Y \longrightarrow \mathrm{Cyl}_f$ *et* $X \bigvee Y \longrightarrow \mathrm{Cyl}_f$ *sont des cofibrations.*

Si on n'a pas de point base on peut énoncer le résultat analogue.

Soient, H une homotopie (basée) $X \times I \longrightarrow Z$, G une homotopie (basée) $Y \times I \longrightarrow Z$ dont les valeurs en 0 sont les restrictions d'une application $g : \mathrm{Cyl}_f \times I \longrightarrow Z$. Il faut étendre g à $\mathrm{Cyl}_f \times I$ en respectant les valeurs imposées sur $X \times I$ et $Y \times I$.

Les valeurs de l'extension $\tilde{H}$ sur la classe du point $((x,t),u)$ sont données par le formules suivantes -au temps de déformation u :

- si $t \leq \frac{u}{3}$, $\tilde{H}((x,t),u) = H(x,-3t+u)$,
- $\frac{u}{3} \leq t \leq 1-\frac{u}{3}$, $\tilde{H}((x,t),u) = g(x, \frac{-3}{2u-3}t - \frac{u}{2u-3})$,
- si $t \geq 1-\frac{u}{3}$ $\tilde{H}((x,t),u) = G(f(x), 3\frac{t-1}{u}+1)$ (malgré la résence de u au dénominateur cette formule s'étend par continuité en $u=0$ car $3(1-t) \geq u$.

Ceci est décrit dans la figure 3, l'application $\tilde{H}$ est constante (à x constant) sur les droites en pointillés. Les applications décrites respectent les points bases.

Corollaire 2.3 *Toute application continue* f *peut être écrite comme composition d'une cofibration et d'une équivalence d'homotopie.*

En effet on peut écrire f comme $p \circ i$ où i est l'inclusion de X dans Cyl_f et de $p : \mathrm{Cyl}_f \longrightarrow Y$ qui est une rétraction par déformation.

3 Le théorème de Whitehead

Théorème 3.1 *Soit* X *et* Y *deux CW-complexes connexes,* $f : X \longrightarrow Y$ *qui induit un isomorphisme sur les groupes d'homotopie. Alors* f *est une équivalence d'homotopie.*

Corollaire 3.2 *Soit* X *un CW-complexe connexe avec point base dont les groupes d'homotopie sont triviaux. Alors* X *est contractile, c'est dire qu'il se rétracte par déformation sur le point base.*

On rappelle si X est un CW-complexe connexe tout point peut tre choisi comme point base (la condtion est que $x_0 \hookrightarrow X$ soit une cofibration) et que les groupes d'homotopie ne dépendent pas isomorphisme près du point base)

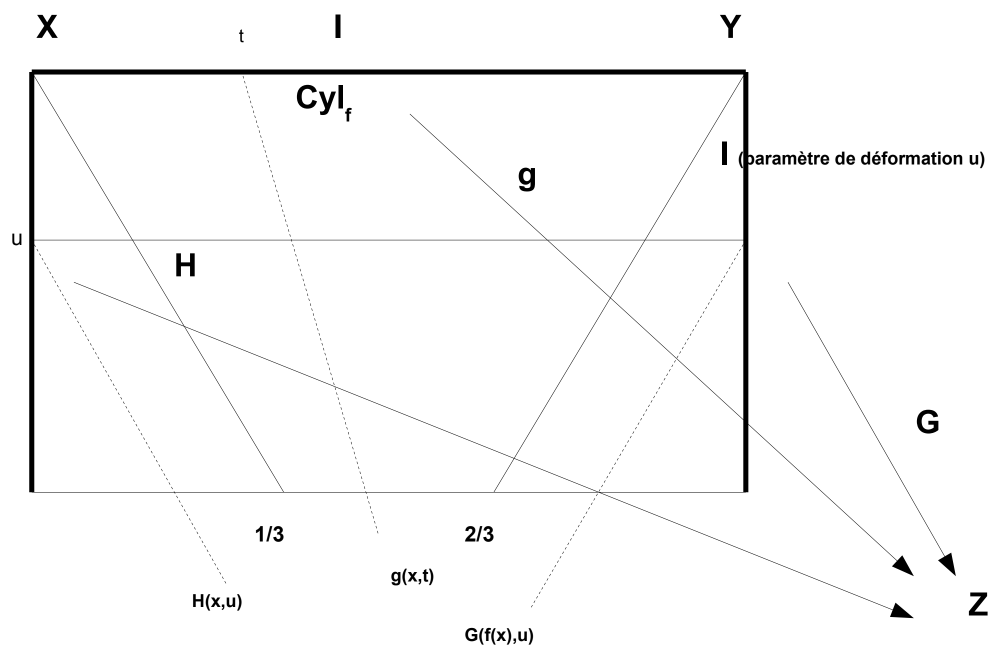
X
t
I
Y
Cyl
f
g
I (paramètre de déformation u)
u
H
G
1/3
2/3
g(x,t)
H(x,u)
G(f(x),u)
Z

Figure 3: 1

4 Démonstration

On commence par observer que les ensembles d'homotopie relatifs $\pi_k(\mathrm{Cyl}_f, X, x_0)$ sont triviaux. Ceci s'observe le plus facilement si on connait la longue suite exacte des groupes relatifs d'une paire :

Théorème 4.1 *Soit une paire (X, A), on note $i : A \longrightarrow X$, l'inclusion, $j : (X, x_0) \longrightarrow (X, A)$ l'inclusion de paires, $\partial : \pi_k(X, A, x_0) \longrightarrow \pi_{k-1}(A, x_0)$ l'application qui envoie (la classe d')un élément de $\pi_k(X, A, x_0)$ sur (la classe de) sa restriction à S^{k-1}. On a une suite exacte :*

$$\pi_k(A; x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_k(X; x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_k(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{k-1}(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \dots \xrightarrow{j_*} \pi_1(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_0(X, x_0)$$

que l'on applique à la paire (Cyl_f, X). L'hypothèse implique alors que l'inclusion induit un isomorphisme sur les groupes d'homotopie car Cyl_f se rétracte par déformation sur Y. Cela implique que les "groupes" d'homotopie relatifs de la paire sont triviaux.

On peut le faire directement, mais ceci revient à démontrer la suite exacte ci-dessus.

On peut alors appliquer le lemme 1.1 et déformer l'inclusion de $X \bigvee Y$ dans le cylindre en une application dans X. L'homotopie étant fixe sur X.

On utilise le fait que l'inclusion $X \bigvee Y \subset \mathrm{Cyl}_f$ est une cofibration pour étendre toute cette homotopie au cylindre. On a donc une homotopie de l'identité du cylindre (rel X) avec une application g envoyant $Y \subset \mathrm{Cyl}_f$ dans X.

Enfin si on considère l'application composée entre les paires :

$$(X \times I \coprod Y, X \times \partial I \coprod Y) \longrightarrow (\mathrm{Cyl}_f, X \bigvee Y) \xrightarrow{g} (\mathrm{Cyl}_f, X)$$

on peut encore appliquer 1.1 pour obtenir une rétraction par déformation du cylindre sur X.

5 La longue suite exacte d'homotopie

On vérifie dans cette section la longue suite exacte d'homotopie 4.1 et on précise le sens à y donner pour ce qui est des derniers termes.

- $j_* \circ i_* = 0$, on utilise la convexité de D^n, et le fait que l'image de D^n est contenue dans A.
- $\mathrm{Ker}(j_*) \subset \mathrm{Im}(i_*)$, si $j_*([\alpha]) = 0$ cela veut dire que l'on peut déformer α vue comme application de (D^k, S^{k-1}) dans (X, A) en une application valeurs dans A. Le lemme 1.2 nous permet de choisir l'homotopie fixe sur S^{k-1}, soit d'image constante x_0. Le résultat suit.
- $\partial \circ j_* = 0$, la donnée de $[\alpha] \in \pi_k(X, A)$ est celle de l'homotopie de $[\partial(\alpha)] \in \pi_{k-1}(X, x_0)$.
- $\mathrm{Ker}(\partial) \subset \mathrm{Im}(i_*)$, l'homotopie 0 de $\partial(\alpha) \in \pi_{k-1}(X, x_0)$ permet de faire une homotopie entre α et une application de paire envoyant S^{k-1} vers x_0, donc provenant de $\pi_k(X, x_0)$.
- $i_* \circ \partial = 0$, c'est clair.
- $\mathrm{Ker}(i_*) \subset \mathrm{Im}(\partial)$, c'est la définition.