

# 1 Énoncés

Soit  $X$  un espace topologique de point base  $x_0$ , et soit  $h : S^{n-1} \rightarrow X$  une application continue. On définit un espace  $Y$  comme le quotient de  $X \cup D^n$  via la relation d'équivalence qui identifie  $x \in S^{n-1}$  avec  $h(x) \in X$  pour tout  $x \in S^{n-1}$ . On notera  $i : X \rightarrow Y$  l'inclusion canonique.

L'intérieur de  $D^n$  (la boule unité fermée dans  $\mathbf{R}^n$ ) est identifié au sous-ensemble de  $Y$  correspondant et sera appelé la  $n$ -cellule ouverte et notée  $e^n$ . Son adhérence, qui en est la réunion avec l'image de  $h(S^{n-1})$ , est la  $n$ -cellule fermée et notée  $\bar{e}^n$ .

**Théorème 1.1** *L'application  $i$  induit un isomorphisme  $i_* : \pi_i(X) \rightarrow \pi_i(Y)$  sur les groupes d'homotopie si  $i < n - 1$  et un épimorphisme si  $i = n - 1$ .*

On donne ci-dessous les constructions utilisés pour démontrer ce résultat.

**Lemme 1.2** *Soit  $E^n$  la boule unité de  $\mathbf{R}^n$  à laquelle on a enlevé le centre. L'espace  $Y'$ , obtenu comme quotient de  $X \cup E^n$  via la relation d'équivalence qui identifie  $x \in S^{n-1}$  avec  $h(x) \in X$  pour tout  $x \in S^{n-1}$ , se rétracte par déformation sur  $X$ .*

En effet  $E^n$  se rétracte par déformation sur  $S^{n-1}$  par l'homotopie

$$u\pi + (1 - u)\text{Id}$$

entre la projection radiale  $\pi$  de  $E^n$  sur  $S^{n-1}$  et l'identité de  $E^n$ . Cela induit formellement la rétraction recherchée. On notera que l'on peut remplacer l'origine par un point quelconque dans l'intérieur de la boule.

Soit  $\alpha \in \pi_i(Y)$  représenté par une application de  $D^i$  dans  $Y$  qui envoie le bord  $S^{i-1}$  sur  $x_0$ . On va montrer que si  $i < n$  on peut déformer cette application en une application  $\alpha'$  qui évite le centre de la boule  $D^n$ . On montre alors, utilisant la rétraction par déformation de  $Y'$  sur  $X$ , que cette dernière application  $\alpha'$  est homotope à une application prenant valeurs dans  $X$ . Ce qui donne la surjectivité si  $i < n$ . Toutes les homotopies considérées plus haut sont basées.

On reviendra sur la bijectivité si  $i < n - 1$  à la fin.

# 2 Subdivision barycentrique

Le  $n$ -simplexe standard  $\Delta^n$  est le sous-espace de  $\mathbf{R}^{n+1}$  des  $(n+1)$ -uplets  $(t_1, \dots, t_{n+1})$  tels que  $\sum_i t_i = 1$  et  $t_i \geq 0$  pour tout  $i$ .

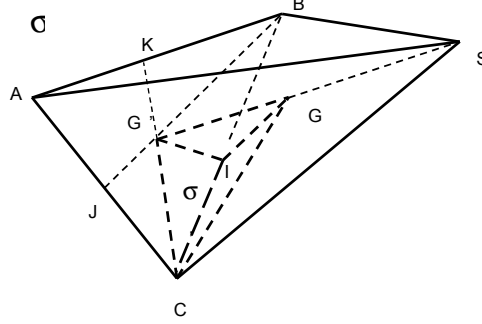
On appellera  $n$ -simplexe dans un espace  $\mathbf{R}^k$  un sous ensemble image de  $\Delta^n \subset \mathbf{R}^n \subset \mathbf{R}^k$  par une bijection affine de  $\mathbf{R}^k$ . Ceci suppose évidemment que  $n \leq k$ . Si on considère des applications affines quelconques (et donc que l'on ne suppose plus que  $n \leq k$ ) on parlera de  $n$ -simplexe singulier.

On définit la subdivision barycentrique d'un  $n$ -simplexe par récurrence sur  $n$ . Un 1-simplexe est juste un segment  $[A, B]$  dans un espace affine. Soit  $I$  le milieu de  $[A, B]$ , la subdivision de  $[A, B]$  est la donnée de ce segment comme réunion des segments  $[A, I]$  et  $[I, B]$ .

Un 2-simplexe  $\sigma$  est un triangle de sommets  $A, B, C$  dans un espace affine. Soient  $I, J$  et  $K$  les milieux de  $[B, C]$ ,  $[C, A]$  et  $[A, B]$ . Et soit  $G$  le centre de gravité du triangle. La décomposition barycentrique de  $\sigma$  est la décomposition du simplexe comme réunion des six 2-simplexes de sommets  $(A, G, K)$ ,  $(K, G, B)$ ,  $(B, G, I)$ ,  $(I, G, C)$ ,  $(C, G, J)$ , et  $(J, G, A)$ .

De manière générale soit un  $n$ -simplexe  $\sigma$ , son bord est réunion de  $(n+1)$   $(n-1)$ -simplexes (les faces). On effectue la subdivision barycentrique de tous ces  $(n-1)$ -simplexes et on considère le centre de gravité  $G$  de  $\sigma$ . La subdivision barycentrique de  $\sigma$  est la donnée du simplexe initial comme réunion des  $n$ -simplexes dont les sommets sont  $G$  et les  $n$ -sommets de l'un quelconque des  $(n-1)$ -simplexes apparaissant dans la subdivision de l'une quelconque des faces.

On notera  $\text{Subd}(\sigma)$  la subdivision d'un  $n$ -simplexe  $\sigma$ , c'est-à-dire la réunion des  $n$ -simplexes obtenus ainsi qu'il a été décrit. On peut itérer cette construction et obtenir les subdivisions itérées  $\text{Subd}^k(\sigma)$



Dans la figure ci dessus on décrit un cas particulier de ce processus.

On suppose maintenant que les espaces affines que l'on considère sont euclidiens. On définit le diamètre  $\text{diam}(A)$  d'un sous-ensemble  $A$  comme la borne supérieure (quand elle existe) des quantités  $\|x - y\|$  pour  $x$  et  $y$  décrivant  $A$ .

**Proposition 2.1** *Soit  $\sigma$  un  $n$ -simplexe, et soit  $\sigma'$  un  $n$ -simplexe de la subdivision barycentrique. Alors*

$$\text{diam}(\sigma') \leq \frac{n}{n+1} \text{diam}(\sigma)$$

### 3 construction de l'homotopie

L'application  $\alpha$  prend valeur dans  $Y$ . Soit  $K_\rho$  l'image inverse par  $\alpha$  d'une boule fermée  $\bar{e}(\rho)$  contenue dans la cellule  $e^n$  :  $\bar{e}(\rho)$  s'identifie à la boule fermée de centre l'origine et de rayon  $0 < \rho < 1$  dans  $D^n$ . C'est un compact dans  $\Delta^i$ . L'application  $\alpha$  restreinte à ce compact est uniformément continue.

Soit aussi  $U_1$  (resp.  $U_2$ ) la boule ouverte de centre l'origine et de rayon  $\rho/3$  (resp.  $2\rho/3$ ).

**Lemme 3.1** *Pour  $k$  assez grand l'image de tout simplexe de  $\text{Subd}^k(\Delta^i)$ , qui est d'intersection non vide avec  $K_\rho$ , est de diamètre strictement inférieur à  $\epsilon > 0$  donné.*

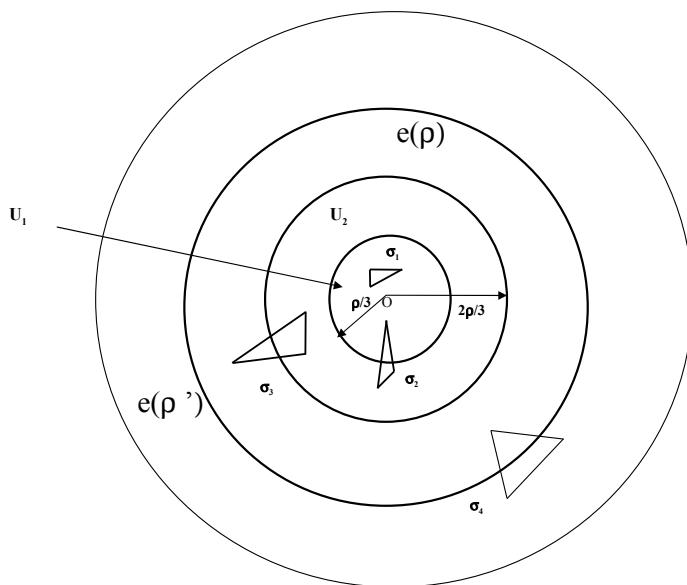
Cela résulte de 2.1.

Le lemme précédent montre que pour  $k$  assez grand le diamètre des simplexes constituant la subdivision itérée peut être rendu arbitrairement petit. On choisit un  $\rho'$  tel que  $\rho < \rho' < 1$  et l'on choisit  $\epsilon < \rho' - \rho$ , on supposera de plus que  $3\epsilon < \rho/3$ . On choisit alors  $\delta$  tel que si  $x, y \in K_{\rho'}$  et  $\|x - y\| < \delta$  on ait  $\|\alpha(x) - \alpha(y)\| < \epsilon$ . Avec ce choix, si on suppose que l'on a subdivisé suffisamment pour que le diamètre de tout simplexe de  $\text{Subd}^k(\Delta^i)$  soit inférieur à  $\delta$ , un simplexe rencontrant  $K_\rho$  a son image dans  $e(\rho')$ . On observe que la condition  $3\epsilon < \rho/3$  n'est pas utilisée, elle le sera plus tard.

Soit un simplexe  $\sigma$  dont l'image est contenue dans  $e(\rho)$ . Les images des  $i + 1$  sommets du simplexe détermine une unique application affine de  $\ell_\sigma$  de  $\sigma$  dans  $D^n$ . On considère l'homotopie de  $\alpha$  restreint à ce simplexe à l'approximation linéaire déterminée plus haut. Cette homotopie est fixe sur les sommets. Elle est donnée par la formule

$$H(s, u) = u\alpha_\sigma(s) + (1 - u)\ell_\sigma(s)$$

$s \in \sigma, u \in [0, 1]$ .



**Lemme 3.2** *Le diamètre de l'image de  $\sigma \times [0, 1]$  est inférieur à  $3\epsilon$ .*

Ceci est laissé en exercice.

On considère alors

- l'ensemble  $E_1$  des simplexes dont l'image est contenue dans la boule ouverte de centre l'origine et de rayon  $\frac{\rho}{3} = U_1$ ,
- l'ensemble  $E_2$  des simplexes dont l'image est contenue dans la boule ouverte de centre l'origine et de rayon  $\frac{2\rho}{3} = U_2$ , mais n'est pas contenue dans  $U_1$ ,
- l'ensemble  $E_3$  des simplexes dont l'image est contenue dans la boule de centre l'origine et de rayon  $\rho$ , mais n'est pas contenue dans  $U_2$ ,
- l'ensemble  $E_4$  qui consiste en tous les autres simplexes.

Comme on suppose que  $3\epsilon < \frac{\rho}{3}$  les images des homotopies  $H$  sur les simplexes appartenant aux ensembles  $E_2, E_3$  ne peuvent contenir le centre de la boule  $D^n$ . En effet toutes ces images ont au moins un point hors de  $U_1$  et leur diamètre est strictement inférieur à  $3\epsilon$ .

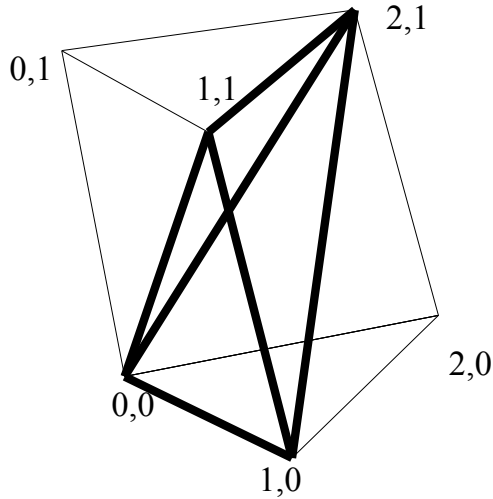
Pour les simplexes de  $E_4$  et pour lesquels l'homotopie n'est pas nécessairement définie les conditions impliquent aussi (et plus trivialement) que l'image ne peut contenir le centre de la boule  $D^n$ .

On définit maintenant une application  $\nu$  de l'intérieur de la boule  $D^n$  vers  $[0, 1]$  par

- $\nu$  vaut 1 sur l'adhérence de  $U_1$ ,
- $\nu$  vaut 0 sur l'adhérence de  $e^n \setminus U_2$ ,
- $\nu(v) = -3\|v\| + 2, v \in D^n$ , sinon.

Sur un simplexe  $\sigma$  on considère finalement l'homotopie  $\tilde{H}$  par

$$\tilde{H}(s, u) = H(s, \nu(s)u) \quad s \in \sigma, u \in [0, 1]$$



Elle est bien définie et continue sur  $\Delta^i \times I$ . Elle ne dépend pas de  $u$  pour tous les points dont l'image par  $\alpha$  n'appartient pas à  $U_2$  (elle est alors égale à  $\alpha$ ). On doit considérer l'image des homotopies et non seulement celles des approximations linéaires, car sauf pour les simplexes de  $E_1$  l'homotopie ci dessus s'arrête avant l'approximation linéaire et c'est ce pourquoi on a besoin de  $3\epsilon < \frac{\rho}{3}$ .

Les images des homotopies  $\tilde{H}$  sont contenues dans les images des homotopies  $H$ , et donc sur les simplexes appartenant aux ensembles  $E_2, E_3$  elles ne peuvent contenir le centre de la boule  $D^n$ . De même pour les simplexes de  $E_4$  les conditions impliquent aussi (et plus trivialement) que leur image ne peut contenir le centre de la boule  $D^n$ .

Il n'y a donc que les images des simplexes de  $E_1$  qui peuvent rencontrer l'origine  $O$ . Cependant comme ce sont des simplexes de dimension inférieure à  $n - 1$  dans un espace de dimension  $n$ , et qu'il y en a un nombre fini, quitte à les déplacer on peut éviter l'origine.

Si on veut éviter ce dernier argument il suffit de prendre  $\epsilon$  plus petit. Par exemple tel que  $6\epsilon < \frac{\rho}{3}$ . Dans ce cas l'image des homotopies sur les simplexes n'appartenant pas à  $E_1$  évite la boule de centre l'origine et de rayon  $\epsilon$ . Les images des simplexes de  $E_1$  sont en nombre fini et de dimension au plus  $n - 1$  dans un espace de dimension  $n$ . Ils évitent au moins un point (pas nécessairement l'origine mais c'est indifférent).

#### 4 $i < n - 1$

Pour montrer l'isomorphisme sous la condition  $i < n - 1$  il suffit de montrer que l'on peut ramener une homotopie dans  $Y$  dans l'espace  $X$  en procédant de manière analogue. Pour ce faire on est amené à subdiviser  $\Delta^i \times I$  et non plus  $\Delta^i$ . La subdivision de  $\Delta^i \times I$  se fait en  $(i + 1)$ -simplexe. Au terme d'une argumentation analogue à celle ci-dessus on est amené à considérer un nombre fini de  $(i + 1)$ -simplexes dans un espace de dimension  $n$ . Pour être sûr qu'ils évitent un point il faut donc que  $i + 1 < n$ . Un exemple de subdivision est donnée dans la figure ci-dessus.