

Groupe fondamental et automorphismes

22 janvier 2009

1 Propriétés de relèvement dans les revêtements

Les espace E sont supposés connexes dans les énoncés ci-dessous.

Théorème 1.1 *Soit : $E \rightarrow B$ un revêtement, et $H: A \times I \rightarrow B$ une application qui admet un relèvement h sur $A \times \{0\}$, c'est à dire une application $h: A \times \{0\} \rightarrow E$ telle que $H|_{A \times \{0\}} = p \circ h$. Alors il existe une unique application $\tilde{H}: A \times I \rightarrow E$ tel que $H = p \circ \tilde{H}$ et $\tilde{H}|_{A \times \{0\}} = h$.*

Démonstration : voir Spanier (page 67 théorème 3).

Le corollaire suivant résulte de considérations standards sur les CW-complexes, (X, A) est une paire de CW-complexes, X est connexe.

Corollaire 1.2 *Soit : $E \rightarrow B$ un revêtement, et $H: X \times I \rightarrow B$ une application qui admet un relèvement h sur $A \times I \cup X \times \{0\}$. Alors il existe une unique application $\tilde{H}: X \times I \rightarrow E$ telle que $H = p \circ \tilde{H}$ et $\tilde{H}|_{A \times I \cup X \times \{0\}} = h$.*

Corollaire 1.3 *Soit : $E \rightarrow B$ un revêtement, et $A \hookrightarrow X$ une inclusion de CW-complexes qui est une équivalence d'homotopie. Soit $f: X \rightarrow B$ une application qui admet un relèvement $g: A \rightarrow E : f|_A = p \circ g$. Alors il existe une unique application $F: X \rightarrow E$ telle que $f = p \circ F$ et $F|_A = g$.*

Pour ce dernier énoncé on applique le précédent de la manière suivante. D'abord l'hypothèse sur la paire (X, A) implique (utilisant le lemme de compression) que X se rétracte par déformation sur A . Soit $H: X \times I \rightarrow B$ la composée de cette rétraction r et de f . L'application $r(-, 1)$ est à valeurs dans A , donc $f \circ r(-, 1)$ admet un relèvement à E donné par $g \circ r(-, 1)$. L'application $f \circ r: X \times I \rightarrow B$ se relève sur le sous-espace $A \times I \cup X \times \{1\}$ (sur $A \times I$ le relèvement est donné par g et ne dépend pas de t). On peut étendre ce relèvement à tout $X \times I$. Au temps de déformation $t = 0$ on a un relèvement de f .

Dans tous les énoncés précédents l'unicité est spécifique au fait que p soit un revêtement (et que X est connexe).

Théorème 1.4 *Soit : $E \rightarrow B$ un revêtement, $b \in B$ et $e \in E$ les points bases. Soient X de point base x_0 et $f: X \rightarrow E$, $f(x_0) = e$. L'application f admet un relèvement $\tilde{f}: X \rightarrow E$ tel que $f(x_0) = e$ si et seulement si :*

$$f_*(\pi_1(X, x_0)) \subset p_*(\pi_1(E, e))$$

Si le relèvement existe la condition a lieu par functorialité.

Dans le sens inverse il faut donner un candidat pour le relèvement et vérifier qu'il est bien défini. Le candidat est donné comme suit. On choisit un point $x \in X$ et un chemin quelconque ω de x_0 à x . On considère l'unique relèvement, d'origine e , $\widetilde{f \circ \omega}$ du chemin $f \circ \omega$. Par définition on pose

$$\tilde{f}(x) = \widetilde{f \circ \omega}(1)$$

Il convient de vérifier que cette définition a un sens, à savoir que le choix de ω est indifférent. On commence par observer que si on remplace ω par ω' un chemin homotope le résultat est le même.

Soit $H: I^2 \rightarrow B$ une homotopie entre ω et ω' , $H(t, 0) = \omega(t)$, $H(t, 1) = \omega'(t)$, et $H(0, u) = H(1, u) = x_0$. Si on a un relèvement de $f \circ \omega$ et un de $f \circ \omega'$ d'origine e cela signifie que l'on a un relèvement de $f \circ H$ sur

$$\{(t, 0)\} \cup \{(0, u)\} \cup \{(t, 1)\} \subset I^2 \quad t, u \text{ quelconques}$$

Utilisant 1.3 on peut étendre en un relèvement $\widetilde{f \circ H}$ sur tout I^2 . L'élément $\widetilde{f \circ H}(1, u)$ appartient à $F_{f(x)}$ qui est discret, la valeur est donc constante, donc $\widetilde{f \circ \omega}(1) = \widetilde{f \circ \omega'}(1)$.

Quand on remplace un chemin $f \circ \omega$ par un chemin $\eta * (f \circ \omega)$, avec $\eta \in p_*(\pi_1(E, e))$ clairement on ne change pas l'extrémité du relèvement.

On considère maintenant ω et ω' quelconques, $[(f \circ \omega') * (f \circ \bar{\omega})] \in p_*(\pi_1(E, e))$ par hypothèse. Le relèvement des homotopies montre que $(f \circ \omega') * (f \circ \bar{\omega}) = p \circ \gamma$, où γ est un lacet dans E en e . L'extrémité du relèvement de $(p \circ \gamma) * (f \circ \omega)$ d'origine e est alors la même que celle du relèvement de $(f \circ \omega)$ de même origine. Or $(p \circ \gamma) * (f \circ \omega)$ est homotope à $f \circ \omega'$. Le résultat suit.

2 Action du groupe fondamental de la base sur la fibre

Proposition 2.1 (Comparer avec Hatcher Proposition 1.32) Soit : $E \rightarrow B$ un revêtement connexe, $b \in B$ le point base, $e \in E$ le point base. Alors le groupe $\pi_1(B, b)$ agit à droite transitivement sur la fibre $F_b = p^{-1}(B, b)$. Le stabilisateur du point e est l'image $p_*(\pi_1(E, e)) \subset \pi_1(B, b)$. Ceci fournit une identification de $\pi_1(B, b)$ -ensembles

$$F_b \cong p_*(\pi_1(E, e)) \backslash \pi_1(B, b)$$

Corollaire 2.2

$$|F_b| = \frac{|\pi_1(B, b)|}{|p_*(\pi_1(E, e))|}$$

L'action est définie comme suit. Etant donné un lacet ω en b , $f \in F_b$, on considère son unique relèvement $\tilde{\omega}$ ($p \circ \tilde{\omega} = \omega$) d'origine f dans E . On pose $[\omega](f) = \tilde{\omega}(1)$.

Il faut évidemment vérifier que cette définition est indépendante de la classe d'homotopie de ω . Pour cela on observe que si on a une homotopie $H: I^2 \rightarrow B$ entre ω et ω' , $H(t, 0) = \omega(t)$, $H(t, 1) = \omega'(t)$, et $H(0, u) = H(1, u) = b$. Si on a un relèvement de ω et un de ω' d'origine f cela signifie que l'on a un relèvement \tilde{H} de H sur $\{(t, 0)\} \cup \{(0, u)\} \cup \{(t, 1)\} \subset I^2$, t, u quelconques. Comme les revêtements ont la propriété de relèvements des homotopies (avec unicité) on peut étendre \tilde{H} à tout I^2 . L'élément $\tilde{H}(1, u)$ appartient à F_b qui est discret, la valeur est constante, donc $\tilde{\omega}(1) = \tilde{\omega}'(1)$.

Il faut également vérifier les axiomes d'action de groupe. L'action de l'élément neutre est clairement triviale (ainsi que celle d'un élément dans $p_*(\pi_1(E, e))$). Sinon, soit deux lacets ω et ω' , et $\omega * \omega'$, donc $[\omega * \omega'](e)$ est obtenu en commençant par construire un relèvement de ω , puis un de ω' d'origine $[\omega](e) = \tilde{\omega}(1)$. On a donc $[\omega * \omega'](e) = [\omega']([\omega](e))$.

Si on veut obtenir une action à gauche on peut poser $[\omega]_g(f) = [\tilde{\omega}](f)$.

Il faut évidemment montrer que si $[\omega](e) = e$ alors $[\omega] \in p_*(\pi_1(E, e))$ (attention au point base dans E !). L'hypothèse montre que le relèvement $\tilde{\omega}$ est un lacet en e , le résultat suit.

3 Automorphismes de revêtements

Théorème 3.1 Soit : $E \rightarrow B$ un revêtement connexe, $b \in B$ le point base, $e \in F_b \subset E$ le point base. Il y a un homomorphisme

$$[\omega] \mapsto a_{[\omega]} N_{p_*(\pi_1(E, e))} \rightarrow \text{Aut}(E),$$

surjectif de noyau $p_*(\pi_1(E, e))$. L'image $a_{[\omega]}(e)$ est l'extrémité du relèvement de ω d'origine e . De manière plus générale l'image d'un point x quelconque est l'extrémité du relèvement d'un chemin quelconque de b à $p(x)$ d'origine $a_{[\omega]}(e)$.

On fera attention à ce que la construction dépend du choix de e dans cet énoncé.

Il faut d'abord montrer que l'application est bien définie, puis que c'est un homomorphisme.

Il suffit pour la première partie il suffit de vérifier le critère de [?], soit que

$$p_*(\pi_1(E, a_{[\sigma]}(e))) \subset p_*(\pi_1(E, e))$$

pour $[\sigma] \in N_{p_*(\pi_1(E, e))}(p_*(\pi_1(E, e)))$. Or on vérifie que

$$p_*(\pi_1(E, a_{[\sigma]}(e))) = [\sigma^{-1}]((\pi_1(E, e))[\sigma]) \subset \pi_1(B, b)$$

le résultat suit.

Puis il faut montrer que ceci ne dépend que de la classe d'homotopie, mais c'est clair : deux lacets homotopes ont même action sur le point base de e , les automorphismes associés coïncident puis qu'ils sont égaux en un point.

En ce qui concerne le noyau il suffit de se ramener à l'action sur le point base de e aussi.

Il faut montrer la surjectivité. Soit α un automorphisme de E , et soit $e' = \alpha(e)$. On choisit un chemin γ de e à e' dans E . Il suffit de montrer que $p \circ \gamma$ est dans le normalisateur de $p_*(\pi_1(E, e))$ et que l'automorphisme associé est α .

Or on a par functorialité

$$p_* \circ \alpha_*(\pi_1(E, e)) = p_*(\pi_1(E, e'))$$

comme $p \circ \alpha = p$

$$p_* \circ \alpha_*(\pi_1(E, e)) = p_*(\pi_1(E, e))$$

de plus on a

$$p_*(\pi_1(E, e')) = (\bar{\gamma}) * p_*(\pi_1(E, e)) * (\gamma)$$

et donc dans $\pi_1(B, b)$

$$p_*(\pi_1(E, e')) = [\bar{p} \circ \gamma]^{-1} p_*(\pi_1(E, e)) [p \circ \gamma]$$

Donc

$$[\bar{p} \circ \gamma]^{-1} p_*(\pi_1(E, e)) [p \circ \gamma] = p_*(\pi_1(E, e))$$

De plus l'automorphisme associé à $p \circ \gamma$ est α par examen de l'action sur e .

Il reste à montrer que $\omega \mapsto a_\omega$ est un homomorphisme de groupes. Soient σ et σ' sont des lacets dans le normalisateur de relèvements respectifs $\tilde{\sigma}$ et $\tilde{\sigma}'$ l'image $a_{\sigma * \sigma'}(e)$ est égale à $\widetilde{\sigma * \sigma'}(1)$. Or il est clair que

$$\widetilde{\sigma * \sigma'} = \tilde{\sigma} * a_\sigma(\tilde{\sigma}')$$

Donc

$$a_{\sigma * \sigma'}(e) = a_\sigma(\tilde{\sigma}')(1) = a_\sigma(a_{\sigma'}(e))$$

Donc

$$a_{\sigma * \sigma'} = a_\sigma \circ a_{\sigma'}$$

Il faut constater que par restriction à la fibre F_b on obtient une action à gauche du groupe des automorphismes. Dans le cas considéré ci-dessous où $\text{Aut}(E) \cong \pi_1(B, b)$ on a donc une action à gauche de $\pi_1(B, b)$ sur F_b . Ce n'est pas l'action considérée ci-dessus (bien qu'elle coïncide pour ce qui concerne l'action sur le point e). On a indiqué implicitement comment les comparer.

Théorème 3.2 Soit : $E \rightarrow B$ un revêtement connexe, $b \in B$ le point base, $e \in E$ le point base. L'action du groupe des automorphismes est transitive sur la fibre (le revêtement est galoisien) si et seulement si $p_*(\pi_1(E, e))$ est normal dans $\pi_1(B, b)$ alors

$$\pi_1(B, b)(p_*(\pi_1(E, e))) \cong \text{Aut}(E), \quad [\omega] \mapsto a[\omega]$$

Corollaire 3.3 Soit : $E \rightarrow B$ un revêtement connexe, $H \subset \text{Aut}(E)$ un sous-groupe. $E/H \rightarrow B$ est galoisien si et seulement si H est normal dans $\text{Aut}(E)$. Dans ce cas

$$\text{Aut}(E)/H \cong \text{Aut}(E/H \rightarrow B)$$

Il est clair que $E \rightarrow E/H$ est galoisien et de groupe d'automorphismes H .

On suppose ci dessous que B a un revêtement universel simplement connexe.

Le résultat suivant est clair par inspection :

Proposition 3.4 Soit F un $\pi_1(B, b)$ -ensemble à droite transitif. Soit \tilde{B} un revêtement universel de B . On considère le quotient de $\tilde{B} \times F$ par l'action (à gauche) de $\pi_1(B, b) : [\sigma](x, f) = ([\sigma]x, [\sigma]^{-1}f)$. Alors la projection

$$\tilde{B} \times_{\pi_1(B, b)} F \rightarrow B$$

est un revêtement connexe, de fibre F comme $\pi_1(B, b)$ -ensemble à droite.

Soit \tilde{B} un revêtement universel de B . On note π la projection de \tilde{B} sur B . Soit u le point base du revêtement universel de B pris dans la fibre $\pi^{-1}(b)$.

Le résultat suivant mérite plus de détails.

Proposition 3.5 Soit : $E \rightarrow B$ un revêtement connexe, F_b la fibre au dessus de b . L'application

$$ev: \tilde{B} \times F_b \rightarrow B$$

définie par le fait que $ev((x, f))$ est l'extrémité de l'unique relèvement à E de la projection par π dans B d'un chemin dans \tilde{B} de u à x , relèvement d'origine f factorise par

$$ev: \tilde{B} \times_{\pi_1(B, b)} F_b \rightarrow B$$

qui est un revêtement connexe, isomorphe à E .

L'action de $\pi_1(B, b)$ sur F_b est l'action à gauche comme ci dessus. Il faut que l'application passe au quotient.

Par définition

- $[\sigma](x)$ est l'extrémité de l'unique relèvement d'origine $\sigma(u)$ de la projection par π dans B d'un chemin γ de u à x .
- $[\sigma](u)$ est l'extrémité de l'unique relèvement d'origine u de σ .
- $ev([\sigma](x), [\sigma]^{-1}f)$ est donc l'extrémité de l'unique relèvement à E de la projection par π dans B d'un chemin dans \tilde{B} de u à $[\sigma](x)$, relèvement d'origine $[\sigma]^{-1}f$.

On peut considérer le chemin $\tilde{\sigma} * (\widetilde{\pi \circ \gamma})$ d'origine u , où $\widetilde{\pi \circ \gamma}$ est le relèvement de $\pi \circ \gamma$ d'origine $[\sigma](u)$. Puis sa projection $\sigma * (\pi \circ \gamma)$. Et enfin le relèvement à E d'origine $[\sigma]^{-1}f$. Ce chemin relie d'abord $[\sigma]^{-1}f$ à f , puis f à $ev((x, f))$.

Soit B connexe. Les deux résultats précédents montrent qu'il ya une équivalence de catégories entre revêtements connexes de B et les $\pi_1(B, b)$ -ensembles transitifs. On peut évidemment supprimer connexe et transitif dans l'énoncé en travaillant composante par composante.

On a aussi

Corollaire 3.6 Soient $p: E \rightarrow B$, $p': E' \rightarrow B$ deux revêtements connexes, e le point base de E , e' le point base de E' . Alors les deux revêtements sont isomorphes si et seulement si $p_*(\pi_1(E, e))$ et $p'_*(\pi_1(E', e'))$ sont conjugués dans $\pi_1(B, b)$.