

L2 Algèbre bilinéaire et Géométrie

Épreuve du 3 Novembre 2009

1. Rappeler ce qu'est la forme polaire d'une forme quadratique Φ .

La forme polaire φ est la forme bilinéaire symétrique définie par la formule

$$\varphi(x, y) = \frac{\Phi(x + y) - \Phi(x) - \Phi(y)}{2}$$

Soit E un espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire symétrique φ . Soient x et y deux vecteurs isotropes pour la forme quadratique associée Φ . Montrer que $x + y$ est isotrope si, et seulement si, x et y sont orthogonaux.

Si $\Phi(x) = \Phi(y) = 0$ on a par la formule ci dessus $\varphi(x, y) = \frac{\Phi(x+y)}{2}$, donc $\varphi(x, y) = 0$ est équivalent à $\Phi(x + y) = 0$.

2. Déterminer une décomposition de Gauss (c'est à dire décomposition en somme de carrés linéairement indépendants) et en déduire noyau, rang, signature pour la forme quadratique :

$$- q : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R} : (x, y, z) \mapsto x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 4xz - 6yz.$$

On écrit

$$- x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 4xz - 6yz = (x^2 + 2x(y - 2z) + (y - 2z)^2) - (y - 2z)^2 + 2y^2 + 2z^2 - 6yz,$$

- posant $x' = x + y - 2z$ on a :

$$- (x^2 + 2x(y - 2z) + (y - 2z)^2) - (y - 2z)^2 + 2z^2 - 6yz = x'^2 - y^2 + 4yz - 4z^2 + 2y^2 + 2z^2 - 6yz,$$

- soit $\dots = x'^2 + (y^2 - 2yz + z^2) - z^2 - 2z^2$,

- posant $y' = y - z$ et $z' = z$ on obtient :

$$- \dots = x'^2 + y'^2 - 3z'^2.$$

Le rang est donc 3 (il y a 3 carrés linéairement indépendants avec des coefficients non nuls. La signature (2, 1). Le noyau est réduit au vecteur nul puis que que l'on sait que c'est un sous-espace de dimension égale à la différence de la dimension de l'espaces (3 ici) et du rang (3 aussi).

3. Pour la forme quadratique suivante, où a est un paramètre réel, déterminer une décomposition de Gauss. En déduire noyau, rang, signature en fonction de a :

$$- q : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R} : (x, y, z, t) \mapsto x^2 + a^2y^2 + 2axz + 2yz$$

On écrit

$$- x^2 + a^2y^2 + 2axz + 2yz = (x^2 + 2axz + a^2z^2) + a^2y^2 + 2yz - a^2z^2,$$

- posant $x' = x + az$ on a :

$$- \dots = x'^2 + a^2(y^2 + 2\frac{yz}{a^2} + \frac{z^2}{a^4}) - \frac{z^2}{a^2} - a^2z^2 \text{ il faudra évidemment distinguer le cas } a = 0 \text{ des autres,}$$

- posant $y' = y + \frac{z}{a}$ et $z' = z$ on obtient

$$- \dots = x'^2 + a^2y'^2 - (a^2 + \frac{1}{a^2})z'^2.$$

So $a \neq 0$ la forme est de rang 3 et signature (2, 1). Si $a = 0$ $x^2 + 2yz$ on pose $x' = x$, $y = y' + z'$, $z = y' - z'$ et la forme devient $x'^2 + 2y'^2 - 2z'^2$. Le rang est encore 3 et la signature (2, 1).

4. Soient x_0, x_1, x_2 3 éléments de \mathbf{R} deux à deux distincts. Montrer que la famille $\mathcal{L} = (L_i)_{0 \leq i \leq 2}$ de polynômes définis par :

$$L_i(X) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^2 \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$$

est une base de $P_2[X]$ (les polynômes de degré inférieur ou égal à 2).

L'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 est de dimension 3. Il suffit donc de montrer que les 3 polynômes L_0, L_1, L_2 sont linéairement indépendants. On considère une combinaison linéaire $P = \alpha L_0 + \beta L_1 + \gamma L_2$. Supposons P nul. Il faut montrer que $\alpha; \beta, \gamma$ sont nuls. Calculons la valeur de la combinaison linéaire en x_0 . On calcule $L_0(x_0) = 1$ et $L_1(x_0) = L_2(x_0) = 0$. Il suit que $\alpha = P(x_0) = 0$. En calculant en x_1 on trouve $\beta = 0$, avec x_2 on a $\gamma = 0$. Le résultat suit.

En fait on vient d'observer que $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$. Ceci montre par définition de la base duale la question suivante.

Montrer que la base duale de \mathcal{L} est définie par les formes linéaires $L_i^*(P) = P(x_i)$ ($i = 0, 1, 2$).

On considère l'application Δ qui à un élément de $P_2[X]$ associe la valeur de sa dérivée seconde en 0. Montrer que c'est une forme linéaire.

Il suffit d'observer que $(P + Q)''(0) = P''(0) + Q''(0)$ et $(aP)''(0) = aP''(0)$.

L'écrire comme combinaison linéaire des L_j^* .

Les L_j^* formant une base du dual on peut décomposer la forme linéaire ci dessus sur cette base :

$$\Delta = \alpha L_0^* + \beta L_1^* + \gamma L_2^*$$

On calcule avec cette formule en l'appliquant sur les polynômes $1, X, X^2$, les deux premiers polynômes on a une dérivée seconde nulle, le troisième a la dérivée seconde égale à 2, on obtient donc

- $0 = \alpha + \beta + \gamma$ pour 1,
- $0 = \alpha x_0 + \beta x_1 + \gamma x_2$ pour X ,
- $2 = \alpha x_0^2 + \beta x_1^2 + \gamma x_2^2$ pour X^2 .

Ce système se résoud facilement mais on peut aussi calculer avec les polynômes L_0, L_1, L_2 . On obtient alors (compte tenu du calcul des dérivées secondes) directement :

- $\frac{1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \alpha$ pour L_0 ,
- $\frac{1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \beta$ pour L_1 ,
- $\frac{1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \gamma$ pour L_2 .

5.

Soit φ la forme bilinéaire symétrique sur \mathbf{R}^2 dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit Φ la forme quadratique associée.

1. Quel est le rang de Φ et son noyau ?

Le rang de la matrice associée est 2, donc le rang est 2. Cela résulte aussi de la question suivante.

2. Déterminer une décomposition de Gauss de Φ . Quelle est la signature de Φ ?

On pose $x = x' + y'$, $y = x' - y'$. On obtient donc $2xy = 2x'^2 - 2y'^2$. La signature est $(1, 1)$.

3. Déterminer une matrice P telle que tPAP diagonale.

La matrice P est donnée par la formule $X = PX'$, soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

4. Quels sont les vecteurs isotropes de Φ ? Ce sont les vecteurs de la forme $(a, 0)$ ou $(0, a)$.