L2 Mathématiques, Informatique

Epreuve du 27 Janvier 2006

Les téléphones portables et les calculettes sont interdits

1. Etudier la nature des séries de termes généraux :

- $\frac{n^n}{4^n n!}$. le plus simple est d'appliquer la règle de d'Alembert, le rapport obtenu est $\frac{(1+\frac{1}{n})^n(n+1)}{4n}$. Comme $(1+\frac{1}{n})^n$ tend vers e quand n tend vers l'infini la limite est $\frac{e}{4} < 1$. Il ya convergence.
- $\frac{n}{n^4+\log(n)}$; comparaison à la série de Riemann : $\frac{n}{n^4+\log(n)} < \frac{1}{n^3}$, il ya convergence.
- $e^{\frac{1}{n}} - \sin(\frac{1}{n}) - \cos(\frac{1}{n})$; développement limité, puis comparaison à une série de Riemann, il ya convergence puisque on obtient un terme en $\frac{1}{6n^3}$ plus des termes d'ordre supérieur. Convergence.
- $\frac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}}$. Convergence par application du critère des séries alternées. Ne pas oublier de vérifier les deux conditions, à savoir décroissance et limite 0.

2. Donner les développements en séries entières au voisinage de 0 des fonctions suivantes en précisant le rayon de convergence e^x et $\frac{1}{(1-x)^2}$.
Voir Liter Martinais ou tout aure manuel. Ce type de développement est à savoir ar coeur (avec log, cos,sin, ch,...)

3. Donner les rayons de convergence des séries entières :

- $\sum \frac{x^n}{n3^n}$; 3, appliquer Cauchy en se souvenant que la limite de $n^{\frac{1}{n}}$ quand n tend vers l'infini vaut 1.
- $\sum a^{\sqrt{n}} x^n$, où a est un réel strictement positif; 1 appliquer Cauchy.
- $\sum (1+\frac{1}{n})^{n^2} x^n$. e appliquer Cauchy et la limite de $(1+\frac{1}{n}^n$ quand n tend vers l'infini vaut e.

4. L'intégrale suivante est elle convergente :

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{e^t - 1}}$$

La difficulté se trouve en $t = 0$ car la fonction au dénominateur tend vers 0, donc le rapport tend vers l'infini. On fait un développement limité en $t = 0$. La fonction sous le signe somme est alors équivalente quand t tend vers 0 à $\frac{1}{t}$. Il y a divergence (Riemann).
5. L'intégrale suivante est elle convergente :

$$\int_0^{+\infty} t^4 e^{-t} dt$$

Le problème est à l'infini. Mais $t^4e^{-t} < t^2$ pour tout t assez grand car la limite de t^2e^{-t} quand t tend vers l'infini vaut 0. Il y a convergence sur $[1, +\infty[$ par comparaison à une intégrale de Riemann. Sur $[0, 1]$ la fonction est continue. Il y a convergence.

6. Soit la matrice A :

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

6.1. 2 est valeur propre triple, le sous espace prpre est de diension 1, $(1, 1, -1)$ est vecteur propre.
6.2. Trouver un vecteur $\vec{v}$ de $\mathbf{R}^3$ tel que $(A - 2I_3)^2(\vec{v}) \neq 0$. En déduire une base de jordanisation (i.e. une base dans laquelle A triangularise sous forme de Jordan). On peut prendre le vecteur $= u_3(0, 0, 1)$. Auquel cas on pose $u_2 = (A - 2I_3)(u_3) = (2, 2, 0)$ et $u_1 = (A - 2I_3)(u_2) = (-4, 4, 4)$ et (cours) (u_1, u_2, u_3) forment une base de jordanisation.
6.3. Calculer A^n pour tout entier n, $n \geq 0$. On pose $N = A - 2I_3$. On sait que $N^3 = 0$ (Cayley Hamilton). On écrit $A^n = (2I_3 + N)^n = 2^n I_3 + n2^{n-1}N + \frac{n(n-1)}{2}2^{n-2}N^2$ (application de la formule de Newton, utilisant que $N^3 = 0$). Et N^2 est égale à

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

7.1. Résoudre le système différentiel en la variable t :

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + 2y_2 \\ y_2' &= 2y_1 + y_2 \end{aligned}$$

Les valeurs propres sont -1 et 3, des vecteurs propres associés $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La solution générale est donc de la forme $\begin{pmatrix} \lambda e^{-t} + \mu e^{3t} \\ -\lambda e^{-t} + \mu e^{3t} \end{pmatrix}$
7.2. Résoudre le système différentiel en la variable t

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + 2y_2 + t \\ y_2' &= 2y_1 + y_2 + te^t \end{aligned}$$

Plusieurs approche étaient possibles. Le plus souvent on s'est ramené au système

$$Z' = \Delta Y + P^{-1}B = 0$$

avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\Delta = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $Y = PZ$, $B = \begin{pmatrix} t \\ te^t \end{pmatrix}$.
Et donc on se ramenait à deux équations différentielles linéaires du premier ordre avec

second membre. La première étant $z_1' = z_1 + \frac{1}{2}(t - te^t)$. On résolvait par variation de la constante. Il fallait évidemment revenir après à y_1 et y_2. Il était auusi possible de travailler directement à partir du système initial et de la matrice $S(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{3t} \\ -e^t & e^{3t} \end{pmatrix}$.
Une solution particulière est alors donnée par

$$\int S(t)^{-1}B(t)dt$$

8. Soit la matrice A à coefficients complexes :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a^2+1 & 2 & 0 \\ c & ab & 1 \end{pmatrix}$$

Donner son polynôme caractéristique, puis une condition nécessaire et suffisante sur les paramètres a, b et c pour qu'elle soit diagonalisable.
Les valeurs prpres sont 1 qui est simple et 2 qui est double. Il y a deux manières de procéder. Soit appliquer le théorème qui dit qu'une matrice est diagonalisable si et seulement si elle est annulée par un polynôme à racines simples. En l'occurence A est diagonalisable si et seulement si elle annulée par $(X-2)(X-1)$. Ce qui donne tous calculs faits la condition $a^2+1=0$.
Soit on pouvait observer qu'il était nécessaire et suffisant que l'espace propre associé à 2 soit de dimension 2. Ceci a été fait le plus souvent mais avec des erreurs mineures.