

L2 Mathématiques, Informatique

Epreuve de Janvier 2007

Les téléphones portables et les calculettes sont interdits

1. Etudier la nature des séries de termes généraux :

$$\bullet \frac{(3n)!}{(n!)^3}; \quad \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}; \quad \frac{(-1)^n}{\sqrt{n-2}\ln(n)}.$$

2. Donner les développements en séries entières au voisinage de 0 des fonctions $\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$ et $\int_0^x \frac{e^t-1}{t} dt$ en précisant le rayon de convergence.

3. Donner les rayons de convergence et la somme des séries entières :

$$\bullet \sum_{n \geq 0} (4n+1)x^{4n}; \quad \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n a^{2n}}{(2n)!} x^{2n+1}. \quad \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} x^{2n}.$$

4. Les intégrales suivantes sont elles convergentes :

$$\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln(t)}} dt; \quad \int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{\ln(1+t)} dt$$

5. Soit \mathbf{P}_n l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n . Donner sa dimension.

On considère l'application linéaire de \mathbf{P}_n dans \mathbf{R} qui envoie $P \in \mathbf{P}_n$ sur $P(0)$. Quelle est la dimension de son noyau, que l'on notera K . On considère l'application linéaire de \mathbf{P}_n dans \mathbf{R} qui envoie $P \in \mathbf{P}_n$ sur $P'(0)$. Quelle est la dimension de son noyau, que l'on notera K' .

Quelle est la dimension de $K \cap K'$? Trouver un supplémentaire de $K \cap K'$ dans \mathbf{P}_n aussi simple que possible.

6. Soit la matrice A :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

6.1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de cette matrice.

6.2. Déterminer les sous-espaces caractéristiques. En déduire une base de jordanisation (i.e. une base dans laquelle A triangularise sous forme de Jordan).

6.3. Calculer A^n pour tout entier n , $n \geq 0$.

7. Enoncer une condition nécessaire et suffisante portant sur une matrice A pour qu'elle soit diagonalisable. Soit la matrice à coefficients complexes :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a^2+1 & 2 & 0 \\ c & ab & a \end{pmatrix}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur les paramètres a , b et c pour qu'elle soit diagonalisable.