

## L2 Mathématiques, Informatique

### Epreuve de Janvier 2007 Réponses et indications

1. Etudier la nature des séries de termes généraux :

- $\frac{(3n)!}{(n!)^3}$ ; Application de la règle de d'Alembert. Le rapport  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  vaut  $\frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^3}$  et tend vers 27 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Il y a divergence.
- $\frac{1}{n^n}$ ; Critère grossier de divergence, le terme général tend vers 1 quand  $n$  tend vers  $+\infty$  (voir corrigés années précédentes, le point essentiel est  $\frac{\ln(n)}{n}$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , et donc  $\frac{1}{n^n} = \frac{1}{e^{\frac{\ln(n)}{n}}}$  tend vers 1)
- $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n-2\ln(n)}}$ . Critère des séries alternées. Il faut vérifier que  $\frac{1}{\sqrt{n-2\ln(n)}}$  tend vers zéro en décroissant (tout au moins dès que  $n$  est assez grand) quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Pour la seconde partie il suffit de vérifier que la fonction au dénominateur, soit  $\sqrt{x} - 2\ln(x)$  est à dérivée positive dès que  $x$  est assez grand. Car alors la fonction inverse est à dérivée négative. Or la dérivée est  $\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{x}$  qui est positive si  $x > 16$ .

2. Donner les développements en séries entières au voisinage de 0 des fonctions  $\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$  et  $\int_0^x \frac{e^t-1}{t} dt$  en précisant le rayon de convergence.

- $$\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) = \frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x)) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n>0} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} - \sum_{n>0} \frac{-x^n}{n}\right)$$

et

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{n>0} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} - \sum_{n>0} \frac{-x^n}{n}\right) = \sum_{n>0} \frac{1}{2} \frac{((-1)^{n-1} + 1)x^n}{n} = \sum_{2n+1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Le rayon de convergence vaut 1. Le critère de Cauchy montre qu'il est supérieur ou égal à 1. En effet la quantité  $(u_n)^{\frac{1}{n}}$  n'admet pas de limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , elle alternativement nulle (pour les valeurs paires de  $n$ ) et égale à  $\left(\frac{1}{2n+1}\right)^{\frac{1}{2n+1}}$  (pour les valeurs impaires) qui elle tend vers 1. Ceci implique (cours) que le rayon de convergence vaut au moins 1. Mais il est clair que si  $x > 1$  la quantité  $\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$  tend vers  $+\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . De par la définition du rayon de convergence (la rappeler) celui ci est donc inférieur ou égal à 1. Le résultat suit. Il y avait d'autres manières de procéder (on peut faire un changement de variables après division par  $x$  pour se ramener à une série dont les termes non nuls sont pairs, puis poser  $X = x^2$ , et rappeler que multiplier (ou diviser quand on le peut) par  $x$  ne change pas le rayon de convergence. Ces arguments s'appliquent à divers cas ci-dessous.

- $\int_0^x \frac{e^t-1}{t} dt$  la fonction  $\frac{e^x-1}{x}$  admet le développement en série entière en 0 de rayon de convergence infini  $\sum_{n \leq 0} \frac{x^n}{(n+1)!}$ . On peut intégrer ce développement termes à termes, on a donc

$$\int_0^x \frac{e^t-1}{t} dt = \sum_{n>0} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!(n+1)}$$

qui a même rayon de convergence (cours).

**3.** Donner les rayons de convergence et la somme des séries entières :

- $\sum_{n \geq 0} (4n+1)x^{4n}$ ; on intègre et on obtient  $\sum_{n \geq 0} x^{4n+1} = \frac{x}{1-x^{4n}}$ . Le rayon de convergence vaut 1 même argument que plus haut).
- $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n a^{2n}}{(2n)!} x^{2n+1} = x(\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n (ax)^{2n}}{(2n)!}) = x \cos(ax)$ . Le rayon de convergence est infini (cours pour  $\cos(ax)$  puis on multiplie par  $x$  ce qui ne change pas le rayon de convergence).
- $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} x^{2n} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2} (\frac{(-1)^n}{2n-1} - \frac{(-1)^n}{2n+1}) x^{2n}$ . Puis

$$x(\sum_{n \geq 0} (\frac{(-1)^n}{2n+1}) x^{2n}) = \sum_{n \geq 0} (\frac{(-1)^n}{2n+1}) x^{2n+1}$$

dont la dérivée vaut

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$$

dont une primitive est  $\text{Arctg}x$ , la fonction cherchée était donc  $\frac{\text{Arctg}x}{x}$ .

De même

$$\sum_{n \geq 0} (\frac{(-1)^n}{2n-1}) x^{2n} = 1 + \sum_{n > 0} (\frac{(-1)^n}{2n-1}) x^{2n} = 1 + x(\sum_{n > 0} (\frac{(-1)^n}{2n-1}) x^{2n-1}) = 1 - x \text{Arctg}(x)$$

Le rayon de convergence vaut 1 (même argument que ci-dessus). Remarque : il faut connaître le développement de  $\text{Arctg}(x)$ !

**4.** Les intégrales suivantes sont elles convergentes :

$$\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln(t)}} dt; \quad \int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{\ln(1+t)} dt$$

Pour la première le problème est un  $+\infty$ , on observe que pour  $t$  assez grand  $\sqrt{\ln(t)} < \ln(t)$  et donc que  $e^{-\sqrt{\ln(t)}} > e^{-\ln(t)} = \frac{1}{t}$ . On minore donc par une intégrale de Riemann divergente, il y a divergence par comparaison.

Dans le second cas le problème est en 0, en faisant un développement limité on voit que la fonction sous le signe somme est équivalente à  $\frac{1}{\sqrt{t}}$ . Il y a convergence par comparaison.

**5.** Soit  $\mathbf{P}_n$  l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à  $n$ . Donner sa dimension.

Elle vaut  $n + 1$ , une base est  $1, X, \dots, X^n$ .

On considère l'application linéaire de  $\mathbf{P}_n$  dans  $\mathbf{R}$  qui envoie  $P \in \mathbf{P}_n$  sur  $P(0)$ . Quelle est la dimension de son noyau, que l'on notera  $K$ .

On a une application linéaire d'un espace de dimension  $n + 1$  vers un espace de dimension 1. Elle est surjective (le vérifier). Le théorème du rang (l'énoncer) donne alors  $\dim(K) = n$ .

On considère l'application linéaire de  $\mathbf{P}_n$  dans  $\mathbf{R}$  qui envoie  $P \in \mathbf{P}_n$  sur  $P'(0)$ . Quelle est la dimension de son noyau, que l'on notera  $K'$ .

On a une application linéaire d'un espace de dimension  $n + 1$  vers un espace de dimension 1. Elle est surjective (le vérifier). Le théorème du rang donne alors  $\dim(K') = n$ .

Quelle est la dimension de  $K \cap K'$ ?

On rappelle que  $\dim(K \cap K') + \dim(K + K') = \dim(K) + \dim(K')$ . Or  $K + K' = \mathbf{P}_n$ , car  $n + 1 \geq \dim(K + K') \geq n$ . Puis  $K + K'$  contient le polynôme  $X$  qui n'est pas dans  $K'$  donc la dimension de  $K + K'$  est strictement plus grande que celle de  $K'$  et vaut  $n + 1$ , donc  $K + K' = \mathbf{P}_n$ .

Il en résulte que  $\dim(K \cap K') = n - 1$ .

Trouver un supplémentaire de  $K \cap K'$  dans  $\mathbf{P}_n$  aussi simple que possible.

Un supplémentaire est de dimension 2. Le sous-espace engendré par 1 et  $X$  convient (le vérifier).

6. Soit la matrice  $A$  :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

6.1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de cette matrice.

Les valeurs propres sont 1 (double) et 2 (simple). Les sous-espaces propres sont de dimension 1 engendrés par (en ligne)  $(1, 1, 0)$ , respectivement  $((1, 1, 1)$ .

6.2. Déterminer les sous-espaces caractéristiques. En déduire une base de jordanisation (i.e. une base dans laquelle  $A$  triangularise sous forme de Jordan).

Pour la valeur propre simple, soit 2, le sous espace caractéristique est égal au sous espace propre. Pour la valeur propre double, soit 1, il est égal au noyau de  $(A - I_3)^2$ , est de dimension 2 (la multiplicité) et contient le sous espace propre. En voici une base  $(1, 1, 0)$  et  $(-1, 0, 2)$ . Pour trouver une base de Jordanisation on choisit un vecteur  $v_2$  dans le sous espace caractéristique, associé à 1, qui n'est pas vecteur propre. Alors  $v_1 = (A - I_3)(v_2)$  est vecteur propre associé à 1. Et si  $v_3$  est un vecteur propre associé à 2  $(v_1, v_2, v_3)$  est une base de Jordanisation. On peut prendre  $v_2 = (-1, 0, 2)$ , alors  $v_1 = (1, 1, 0)$ , et  $v_3 = (1, 1, 1)$  (attention notation en ligne!).

6.3. Calculer  $A^n$  pour tout entier  $n$ ,  $n \geq 0$ .

Voir cours.

7. Énoncer une condition nécessaire et suffisante portant sur une matrice  $A$  pour qu'elle soit diagonalisable. Soit la matrice à coefficients complexes :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a^2 + 1 & 2 & 0 \\ c & ab & a \end{pmatrix}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur les paramètres  $a$ ,  $b$  et  $c$  pour qu'elle soit diagonalisable.

D'abord on observe (sans calculs!!) que les valeurs propres sont 2 (double) et  $a$ . Si  $a = 2$  la valeur propre est triple et on conclut tout de suite qu'il n'y a pas diagonalisation (la matrice devrait déjà l'être!).

Sinon ( $a \neq 2$ ) on peut procéder de deux manières, soit dire qu'il faut et suffit que le sous espace propre associé à 2 soit de dimension 2, soit dire qu'il faut et suffit que la matrice  $A$  soit annihilée par le polynôme  $(X - 2)(X - a)$ .

Les calculs sont équivalents, avec la première méthode il faut et suffit que la matrice  $A - 2I_3$  soit :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a^2 + 1 & 0 & 0 \\ c & ab & a - 2 \end{pmatrix}$$

soit de rang 1.

Comme  $a \neq 2$  ceci implique que  $a^2 + 1 = 0$  donc  $a = i$  ou  $a = -i$ . Ce qui est suffisant.