L2 Novembre 2006

Les téléphones portables et les calculettes sont interdits

1. Déterminer la nature des séries de termes généraux :

- $u_n = \sqrt{n}\ 2^{-\sqrt{n}}$,
- $u_n = \frac{\sin(n)+\log(n)}{n^4+\cos(n)}$,
- $u_n = n^{\frac{1}{n}}$,
- $u_n = (1-\frac{1}{n})^{n^2}$,
- $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-\ln(n)}$,
- $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}\sin(\frac{1}{n})$,
- $u_n = \mathrm{t}g(\pi/n)$,
- $u_n = \frac{5\times 11\times 17\times\cdots\times 6n-1}{5\times 12\times 19\times\cdots\times 7n-2}$,
- $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\cos(n)}$.

2. Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes :

- $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}dx$,
- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\ln(x)(x^2+1)}dx$,
- $\int_0^{+\infty} t^4e^{-t}dt$,
- $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{e^{t^2}-1}}$,
- $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}-\ln(t)}dt$.

3. Donner en fonction de $\alpha \in \mathbf{R}$ une condition nécessaire et suffisante pour l'intégrale suivante converge :

$$\int_0^{+\infty} \ln(t)\, t^{\alpha-1}e^{-t}dt$$

4. Etudier et calculer

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))dt$$

On pourra comparer $\int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t))dt$ et étudier la somme.