L2 Novembre 2006 Correction

1. Déterminer la nature des séries de termes généraux :

- $u_n = \sqrt{n}\ 2^{-\sqrt{n}}$,
  la limite quand n tend vers $+\infty$, de $\frac{u_n}{v_n}$ avec $v_n = \frac{1}{n^2}$ est celle de
  $$n^{\frac{5}{2}}\ 2^{-\frac{\sqrt{n}}{2}}$$
  qui vaut 0. Comme la série de terme général v_n converge il en est de même pour la série de terme général u_n (cours).

- $u_n = \frac{\sin(n)+\log(n)}{n^4+\cos(n)}$,
  la limite quand n tend vers $+\infty$, de $\frac{u_n}{v_n}$ avec $v_n = \frac{1}{n^3}$ est celle de
  $$\frac{\sin(n)+\log(n)}{n+\frac{\cos(n)}{n^3}}$$
  soit de
  $$\frac{\log(n)}{n}$$
  qui vaut 0. Comme la série de terme général v_n converge il en est de même pour la série de terme général u_n (cours).

- $u_n = n^{\frac{1}{n}}$,
  le terme général $n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln(n)}{n}}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$, car $\frac{\ln(n)}{n}$ tend vers 0. La série diverge (critère grossier)

- $u_n = (1-\frac{1}{n})^{n^2}$,
  cas d'application de la règle de Cauchy :
  $$(u_n)^{\frac{1}{n}} = (1-\frac{1}{n})^n = e^{n\ln(1-\frac{1}{n})}$$
  par un développement limité ($\ln(1-\frac{1}{n}) = -\frac{1}{n}(1+\varepsilon(\frac{1}{n}))$) l'exposant tend vers -1 quand n tend vers $+\infty$, donc la limite existe et vaut $e^{-1} < 1$. Il y a donc convergence.

- $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-\ln(n)}$,

  cas d'application la règle des séries alternées (énoncer la règle). La fonction $\frac{1}{\sqrt{x}-\ln(x)}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ et est décroissante pour tout x assez grand car sa dérivée est $-\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}}{(\sqrt{x}-\ln(x))^2}$ qui est négative si $x \geq 2\sqrt{x}$, soit $x \geq 4$.

- $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}\sin(\frac{1}{n})$, $\sin(\frac{1}{n})$ quand n tend vers $+\infty$, soit $\frac{1}{n}$ tend vers 0 : on fait un développement limité de $\sin(\frac{1}{n})$:

$$\sin(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3}(1+\varepsilon(\frac{1}{n}))$$

  Donc $u_n = -\frac{1}{6n^{\frac{5}{2}}}(1+\epsilon(\frac{1}{n}))$ qui converge par comparaison avec une série de Riemann.

- $u_n = \tan(\pi/n)$,

  $u_n = \tan(\pi/n)$ est équivalent à $\frac{\pi}{n}$ quand n tend vers $+\infty$. La série qui admet $\frac{\pi}{n}$ pour terme général diverge (règle de Riemann) donc la série initiale diverge.

- $u_n = \frac{5\times 11\times 17\times\cdots\times 6n-1}{5\times 12\times 19\times\cdots\times 7n-2}$,

  application de la règle de d'Alembert, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est égal à $\frac{6n-1}{7n-2}$ et tend vers $\frac{6}{7}$ quand n tend vers $+\infty$, donc la série converge.

- $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\cos(n)}$.

  voir résumé de cours.

2. Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes :

- $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}dx$.

  La fonction est définie en 0, donc le problème est seulement en $+\infty$ et il suffit de se placer sur l'intervalle $[1,\infty[$. On utilise les résultats de comparaison. Comme la limite de $x^2e^{-\sqrt{x}}$ vaut 0 quand x tend vers $+\infty$ si l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ converge, ce qui est le cas (intégrale de Riemann), il en est de même pour $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}dx$. D'où le résultat.

- $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\ln(x)(x^2+1)}dx$.

  Voir résumé de cours, $\int_2^{+\infty}\frac{1}{\ln(x)(x^2+1)}dx$ converge par comparaison à une intégrale de Riemann, par contre $\int_1^2\frac{1}{\ln(x)(x^2+1)}dx$ ne converge pas car la fonction sous le signe somme est équivalente au voisinage de 2 à la fonction $\frac{1}{2(x-1)}$, or l'intégrale de cette fonction est divergente en 1 par la règle de Riemann.

- $\int_0^{+\infty} t^4e^{-t}dt$.

  Même type d'argument que dans le premier cas, la limite de $x^2\times x^4e^{-x}$ vaut 0 quand x tend vers $+\infty$. Par les résultats de comparaison l'intégrale converge.

- $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{e^{t^2}-1}}$.

  Le probnlème est en 0 où la fonction tend vers $+\infty$. ERlle est équivalente à $\frac{1}{t}$ quand t tend vers 0. Les résultats de comparaison et Riemann donne la divergence.

- $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}-\ln(t)} dt$.

  Application du théorème 5.1 (l'énoncer) de la feuille intégrale imprpropre du cours. En notant qu'il suffit que la fonction f soitt décroissante pour x assez grand et tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Ce qui a été vérifié plus haut (cinquième série).

3. Donner en fonction de $\alpha \in \mathbf{R}$ une condition nécessaire et suffisante pour l'intégrale suivante converge :

$$\int_0^{+\infty} \ln(t)\, t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

On divise l'intégrale en deux parties

$$\int_1^{+\infty} \ln(t)\, t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

et

$$\int_0^{1} \ln(t)\, t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

La première partie converge par un argument analogue à celui des intégrales 1 et 3 ci-dessus pour tout α.
Le problème de convergence pour la seconde partie est en 0 car. Si $\alpha > 1$ la fonction tend vers 0 quand x tend vers 0 il y a donc prolongement par continuité et l'intégrale existe.
Si $\alpha \leq 0$, on vérifie (le faire) que $-\ln(t)t^{\alpha-1} > \frac{1}{t}$ dès que $0 < t \leq \frac{1}{e}$ l'intégrale diverge, comparaison et Riemann. On a mis un signe $-$ car le logarithme est négatif dans l'intervalle considérée et la convergence ou la divergence de $\int_0^1 \ln(t)\, t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ est équivalente à celle de $\int_0^1 -\ln(t)\, t^{\alpha-1} e^{-t} dt$.
Il reste $0 < \alpha \leq 1$, dans ce cas il y a convergence encore par comparaison avec une intégrale de Riemann. En effet soit a tel que $0 < a < \alpha \leq 1$. La limite quand t tend vers 0 de $t^{-a} \times \ln(t)\, t^{\alpha-1} e^{-t}$ vaut 0 comme l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^a} dt$ converge car $a < 1$ il en est de même pour $\int_0^1 -\ln(t)\, t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ et donc de $\int_0^1 \ln(t)\, t^{\alpha-1} e^{-t} dt$. On a introduit le signe $-$ pour tenir compte de ce que $\ln(t)$ est négatif dans l'intervalle considéré. Il faut faire attention à ce que l'on est dans un cadre de convergence absolue pour appliquer lesw théorèmes avec des équivalents.

4. Etudier la convergence des intégrales

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))dt, \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t))dt, \int_0^{\pi/2} \ln(\tan(t))dt$$

Ces intégrales ont été étudiées en cours. Considérant la la seconde par exemple le problème concernant l'existence est en 0. Mais lorsque t tend vers 0, $\ln(\sin(t))$ est équivalent à $\ln((t))$ (donner des détails). Et on sait que l'intégrale $\int_0^{\pi/2} \ln(t)dt$ est absolument convergente, la convergence de l'intégrale initiale suit. La seconde est égale à la première; on le montre en faisant un changement de variables $y = \pi/2 - x$. La dernière est la différence des deux premières et vaut 0.