L2 Mathématiques, Informatique

Epreuve du 18 Novembre 2004

Les téléphones portables et les calculettes sont interdits

1. Etudier la nature des séries de termes généraux :

- $\frac{1}{n^{n+\frac{1}{n}}}$;
- $\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}$;
- $\frac{3n+1}{n^3+\cos(n)}$;
- $1-\cos(\frac{1}{\sqrt{n}})$;
- $e^{-\sqrt{n}}$;
- $\frac{(-1)^n \log(n)}{\sqrt{n}}$.

2. Ecrire la décomposition en éléments simples de $\frac{x}{(x-1)^2(2x-1)}$. Puis écrire le développement en série entière (au voisinage de zéro) en précisant le rayon de convergence.

3. Soit $x \in \mathbf{R}$. Montrer que pour $|x| \leq 1$ la série de fonctions de terme général $\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{n(2n+1)}$ converge. Qu'en est il pour $|x| > 1$?
Calculer au moyen de fonctions usuelles la somme de la série des fonctions dérivées. Calculer la somme de la série.

4.

- Calculer la somme $\sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$ pour $x \geq 0$;
- Calculer la somme $\sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$ pour $x \leq 0$.;
- montrer que la fonction f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f(x) = ch(\sqrt{x})$ si $x \geq 0$, $f(x) = \cos(\sqrt{-x})$ si $x < 0$ est indéfiniment dérivable en tout point.

5. Les intégrales suivantes sont elles convergentes :

- $\int_0^1 \frac{(\sin t)^2 \ln(t)}{\sqrt{t^2+1}} dt$;
- $\int_{-\infty}^0 e^t (\cos t)^2 dt$.

6. Pour quelles valeurs de α l'intégrale suivante est elle convergente :

- $\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt$.