

Systèmes différentiels

1 Matrices dépendant d'un paramètre

On considère dans ce chapitre des matrices $A(t) = (a_{i,j}(t))$ dont les coefficients sont des fonctions de la variable réelle t .

Définition 1.1. Une matrice $A(t)$ est dérivable si et seulement si tout coefficient est dérivable comme fonction de t . Sa dérivée est $A'(t) = (a'_{i,j}(t))$.

Les résultats usuels ont lieu :

- $(A(t) + B(t))' = A'(t) + B'(t)$
- $(A(t)B(t))' = A'(t)B(t) + A(t)B'(t)$
- $(A(t)B(t))^{(n)} = \sum_{i=0, \dots, n} \binom{n}{i} A^{(i)}(t) B^{(n-i)}(t)$
- On a aussi

$$(P^{-1}A(t)P)' = P^{-1}A'(t)P$$

On a donné par ailleurs l'exemple de $\exp(tA)$ qui vérifie

$$(\exp(tA))' = A \exp(tA)$$

Notons qu'une matrice n lignes 1 colonne

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

n'est rien d'autre qu'une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^n .

2 Systèmes différentiels homogènes

On considère des fonctions $Y(t)$ de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^n qui vérifient une équation du type

$$Y'(t) = AY(t)$$

Pour une matrice donnée A .

La formule donnée au paragraphe précédent montre que n'importe quelle colonne de la matrice $\exp(tA)$ vérifie cette équation. Plus généralement n'importe quelle combinaison linéaire des colonnes de $\exp(tA)$ vérifie cette équation. En fait

Théorème 2.1. L'ensemble des solutions du système $Y' = AY$ est un espace vectoriel sur \mathbb{R} de dimension n dont une base est donnée par les colonnes de $\exp(tA)$.

La solution générale $Y(t)$ est donnée par

$$\exp(tA)Y_0$$

avec $Y(0) = Y_0$.

Par exemple si A est diagonalisable et si $D = P^{-1}AP$ la solution générale est donnée par

$$P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & \\ 0 & e^{\lambda_2} & 0 & \dots \\ \dots & & & \dots \\ \dots & & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ \\ \\ y_n \end{pmatrix}$$

3 Systèmes avec second membre

On considère maintenant des systèmes du type :

$$Y'(t) = AY(t) + B(t)$$

Proposition 3.1. *La solution générale est somme d'une solution particulière et d'une solution quelconque de l'équation homogène.*

On recherche les solutions particulières par variation de la constante, c'est-à-dire sous la forme $X(t)S(t)$, où $X(t)$ est une matrice dont les colonnes forment une base de l'espace des solutions du système homogène (par exemple $\exp(tA)$) et $S(t)$ une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^n .

On a

$$X'(t)S(t) + X(t)S'(t) = AX(t)S(t) + B(t)$$

Soit

$$S(t) = \int X(t)^{-1}B(t)dt$$

Voici un exemple (MIAS 2005) **1.** Soit f l'application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 dont la matrice A dans la base standard est :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres.
3. Trouver un vecteur \vec{u}_3 de \mathbb{R}^3 tel que $(f - 2Id)^2(\vec{u}_3) \neq 0$.
4. En déduire une base de triangularisation.
5. Calculer A^n pour tout entier n , $n \geq 0$.
6. Résoudre le système différentiel $Y' = AY$.
7. Résoudre le système différentiel

$$Y' = AY + \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres. On trouve 2 valeur propre triple, et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ comme vecteur propre. Le sous-espace propre est de dimension 1. Pour le

montrer on commence pa chercher le rang de $A - 2I_3$, qui est 2, la dimension cherchée est celle du noyau de $A - 2I_3$, soit 1.

3. Trouver un vecteur \vec{u}_3 de \mathbb{R}^3 tel que $(f - 2Id)^2(\vec{u}_3) \neq 0$. La matrice $(A - I_3)^2$ est égale à

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

On peut prendre $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour \vec{u}_3 .

4. En déduire une base de triangularisation.

D'après le cours -on est dans le cas d'une matrice (3, 3) qui a une valeur propre triple et telle que le sous-espace propre associé soit de dimension 1- ($\vec{u}_1 = (f - 2Id)^2(\vec{u}_3)$, $\vec{u}_2 = (f - 2Id)(\vec{u}_3)$, \vec{u}_3) forme une base de triangularisation. Soit

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matrice P de changement de base est

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Son inverse est

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque : la nullité des coefficients de la troisième colonne sur les deux premières lignes peut faciliter beaucoup le calcul.

5. Calculer A^n pour tout entier n , $n \geq 0$.

Le point à savoir est que si

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

alors

$$A^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

On peut retrouver cette formule en développant à l'aide de la formule de Newton $(\lambda I_3 + N)^n$ avec n égale à

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'application de la formule est autorisée ici car I_3 et N commutent. Puis on multiplie à gauche et à droite par P et P^{-1} .

6. Résoudre le système différentiel $Y' = AY$ puis Résoudre le système différentiel

$$Y' = AY + \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On commence par se ramener à résoudre (voir cours) $Z' = TZ$ avec

$$Z'(t) = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On a alors

$$Z(t) = \begin{pmatrix} (\frac{a}{2}t^2 + bt + c)e^{2t} \\ (at + b)e^{2t} \\ ae^{2t} \end{pmatrix} = \exp(tT) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Les constantes a, b, c sont quelconques, éventuellement déterminées par des conditions générales. On a enfin $Y = PZ$.

Pour résoudre le système différentiel

$$Y' = AY + \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On recherche une solution particulière sous la forme

$$\exp(tA)S(t)$$

avec

$$S(t) = \int P \begin{pmatrix} e^{-2t} & -te^{-2t} & \frac{t^2 e^{-2t}}{2} \\ 0 & e^{-2t} & -te^{-2t} \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt$$