Réduction des endomorphismes

Exercice 1 Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que si λ est valeur propre de $g \circ f$ alors λ est valeur propre de $f \circ g$ (on distinguera les cas $\lambda = 0$ et $\lambda \neq 0$).

Exercice 2

Soit $m \in \mathbb{R}$ et $A_m \in M_3(\mathbb{R})$ la matrice $\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$.

1. Calculer les valeurs propres de A_m et une base de vecteurs propres.
2. Déterminer suivant les valeurs de m le rang de A_m. Déterminer lorsque cela est possible A_m^{-1}.
3. Lorsque A_m n'est pas inversible déterminer le noyau et l'image de A_m.

Exercice 3 On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

En effectuant le moins de calculs possible :

1. montrer que $\{0\} \subset \operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker} A^2 \subset \operatorname{Ker} A^3 = \mathbb{R}^4$
et déterminer les dimensions respectives de $\operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Ker} A^2$,
2. déterminer un vecteur e_1 tel que $\mathbb{R}^4 = \operatorname{Ker} A^2 \oplus \operatorname{Vect}(e_1)$,
3. montrer que (e_1, Ae_1, A^2e_1) est une famille libre,
4. montrer que $Ae_1 \in \operatorname{Ker} A^2$, et que $\operatorname{Ker} A^2 = \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Vect}(Ae_1)$,
5. montrer que $A^2e_1 \in \operatorname{Ker} A$ et déterminer un vecteur e_2 tel que $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Vect}(A^2e_1) \oplus \operatorname{Vect}(e_2)$,
6. montrer que (e_1, Ae_1, A^2e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^4$.
7. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base (A^2e_1, Ae_1, e_1, e_2). Caluler $P^{-1}AP$.

Adapter ce travail à l'étude de B et C

Exercice 4 On considère les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ces matrices sont-elles diagonalisables ? Si oui, les réduire.

Exercice 5 Soit J la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

.

1. Trouver une relation entre J et J^2.
2. En déduire les valeurs propres de J et calculer leurs multiplicités.
3. Donner le polynôme caractéristique de J.

Exercice 6 On considère l'application suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & (X^2-1)P' - 2(nX+a)P \end{array}$$

Vérifier que cette application est bien définie.
Déterminer ses valeurs propres, et les espaces propres associés.

Exercice 7 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Trouver les valeurs propres de A et les sous-espaces propres correspondant. En déduire une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Exercice 8

1. Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension n sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ayant chacun n valeurs propres distinctes dans K. Montrer que

   $$f \circ g = g \circ f \Longleftrightarrow f \text{ et } g \text{ ont les mêmes valeurs propres.}$$

2. Supposons maintenant que $K = \mathbb{C}$ et que $f \circ g = g \circ f$. Si u est un endomorphisme on dit qu'un espace vectoriel F est $u-$stable si $u(F) \subset F$. Montrer que tout sous-espace propre de f est $g-$stable.
   Remarque : On peut montrer par récurrence sur n qu'il existe un vecteur propre commun à $f$et g. On admettra ce résultat.
3. Considérons f et g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans la base canonique sont respectivement

   $$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

   – Vérifier que $f \circ g = g \circ f$ et déterminer les sous-espaces propres de M et N.
   – Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle les matrices de f et g sont diagonales.

Exercice 9 Soit $u \in \mathrm{End}(E)$. On note $\chi_u = (-1)^n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$. Montrer que

$$a_0 = \det(u) \qquad \text{et} \qquad a_{n-1} = (-1)^{n-1}\mathrm{tr}(u)$$

Exercice 10 Soit M la matrice suivante : $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer le polynôme caractéristique de M. En déduire M^{-1}.

Exercice 11 Pour quelles valeurs de a, b et c les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ?

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ a & b & c \end{pmatrix}$$