Espaces vectoriels et matrices

Exercice 1 Soit $V = P_4[x]$ l'espace vectoriel de tous les polynômes de degré $\leqslant 4$. Soit $A = \{p \in V \mid p(1) = 0\}$ et $B = \{p \in V \mid x^2+1 \text{ divise } p(x)\}$. Vérifier que A et B sont bien des sous-espaces vectoriels. Donner des bases de A, B, $A \cap B$ et $A + B$.

Exercice 2 Soit F et G les sous-espaces de $\mathbb{R}^5$ définis par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix} \mid \begin{matrix} x_1 - 3x_2 + x_4 = 0 \\ x_2 - x_5 = 0 \end{matrix} \right\} \quad , \quad G = \mathrm{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

Donner des bases pour F, G et $F \cap G$.

Exercice 3 Dans l'espace $\mathbb{R}^4$, on se donne cinq vecteurs : $V_1 = (1,1,1,1)$, $V_2 = (1,2,3,4)$, $V_3 = (3,1,4,2)$, $V_4 = (10,4,13,7)$, $V_5 = (1,7,8,14)$. Chercher les relations de dépendance linéaires entre ces vecteurs. Si ces vecteurs sont dépendants, en extraire au moins une famille libre engendrant le même sous-espace.

Exercice 4 On suppose que $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ sont des vecteurs indépendants de $\mathbb{R}^n$.

1. Les vecteurs $v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, \ldots, v_n - v_1$ sont-ils linéairement indépendants ?
2. Les vecteurs $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, \ldots, v_n + v_1$ sont-ils linéairement indépendants ?
3. Les vecteurs $v_1, v_1+v_2, v_1+v_2+v_3, v_1+v_2+v_3+v_4, \ldots, v_1+v_2+\cdots+v_n$ sont-ils linéairement indépendants ?

Exercice 5 Si L, M, N sont trois sous-espaces vectoriels de E, a-t-on :

$$L \cap (M + N) = L \cap M + L \cap N \ ?$$

Exercice 6 Soit $E = \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $F = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et déterminer un supplémentaire de F dans E.

Exercice 7 Soit E un espace vectoriel, et u une application linéaire de E dans E. Dire si les propriétés suivantes sont vraies ou fausses :

1. Si $e_1, e_2, \ldots, e_p$ est libre, il en est de même de $u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_p)$.
2. Si $u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_p)$ est libre, il en est de même de $e_1, e_2, \ldots, e_p$.
3. Si $e_1, e_2, \ldots, e_p$ est gńératrice, il en est de même de $u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_p)$.
4. Si $u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_p)$ est génératrice, il en est de même de $e_1, e_2, \ldots, e_p$.
5. Si $u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_p)$ est une base de $\mathrm{Im}(u)$, alors $e_1, e_2, \ldots, e_p$ est une base d'un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$.

Exercice 8 Soit E un espace vectoriel de dimension n et φ une application linéaire de E dans lui-même telle que $\varphi^n = 0$ et $\varphi^{n-1} \neq 0$. Soit $x \in E$ tel que $\varphi^{n-1}(x) \neq 0$. Montrer que la famille $\{x, \varphi(x), \varphi^2(x), \dots, \varphi^{n-1}(x)\}$ est une base de E.

Exercice 9 Donner des exemples d'applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant :

1. $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$.
2. $\mathrm{Ker}(f)$ inclus strictement dans $\mathrm{Im}(f)$.
3. $\mathrm{Im}(f)$ inclus strictement dans $\mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 10 E est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel, F et G deux sous-espaces supplémentaires de E : $E = F \bigoplus G$. On pose $s(u) = u_F - u_G$ où $u = u_F + u_G$ est la décomposition (unique) obtenue grâce à $E = F \bigoplus G$. On dit que s est la symétrie par rapport à F de direction G.

1. Montrer que $s \in \mathcal{L}(E)$, que $u \in F \Leftrightarrow s(u) = u, u \in G \Leftrightarrow s(u) = -u$, donner $\mathrm{Ker}(s)$ et calculer s^2.
2. Réciproquement si $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $f^2 = id_E$. On pose $p = \frac{f+id_E}{2}$. Calculer $f(u)$ en fonction de $p(u)$ et u. Vérifier que p est un projecteur, calculer son noyau et son image. Montrer que f est la symétrie par rapport à $F = \{u \in E | f(u) = u\}$ de direction $G = \{u \in E | f(u) = -u\}$.

Exercice 11 Soient p et q deux projecteurs de E, espace vectoriel, tels que $pq = qp$ (p et q commutent). Montrer que pq et $(p + q - pq)$ sont deux projecteurs de E, et que :

$$\mathrm{Im}(pq) = \mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q,$$

$$\mathrm{Im}(p + q - pq) = \mathrm{Im}\, p + \mathrm{Im}\, q.$$

Exercice 12 Montrer que les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

sont inversibles et calculer leurs inverses, par la méthode du pivot de Gauss.
En déduire la solution des systèmes linéaires

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & + & 3z & = & 1 \\ 2x & + & 5y & + & 3z & = & 0 \\ x & + & 2y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ x & + & y & + & 2z & = & 1. \end{array} \right.$$

Exercice 13 Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et (e_1, e_2, e_3) une base de E. On note f l'endomorphisme de E dont la matrice par rapport à la base (e_1, e_2, e_3) est

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 3 \\ -7 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que les vecteurs

$$e'_1 = e_1 + 2e_2 - e_3, \qquad e'_2 = e_2 + e_3 \qquad \text{et} \qquad e'_3 = -e_1 + e_2 + 3e_3$$

forment une base de E et écrire la matrice de f dans la base (e'_1, e'_2, e'_3).

Exercice 14 1. Soit la matrice
$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$
Montrer que P est inversible et calculer son inverse.

2. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même définie par
$$f(x, y, z) = (2y + z - x,\ -x - 2y,\ 4y + z).$$
Écrire la matrice A de f par rapport à la base canonique et calculer sa matrice A' par rapport à la base de $\mathbb{R}^3$ dont les vecteurs ont pour composantes, par rapport à la base canonique, les vecteurs colonnes de P.

3. Déterminer, sans autre calcul, le rang de f, une base de son noyau et une base de son image.

Exercice 15 1. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par
$$f(x, y, z, t) = (x + 2y + t,\ 2x + 3y + z + t,\ 2x + 4y + 2t).$$
Écrire la matrice A de f par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$. Quel est le rang de A ?

2. Donner une base du noyau et une base de l'image de f.

3. Mêmes questions avec f définie par
$$f(x, y, z, t) = (x + y + 3t,\ 2x - 3y + 5z + t,\ x + 2y - z + 4t).$$

Exercice 16 Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs
$$v_1 = (1, 1, -1, -1) \quad \text{et} \quad v_2 = (1, 2, 2, 1).$$
Trouver, sous forme d'un système d'équations linéaires, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un vecteur $v = (x, y, z, t)$ de $\mathbb{R}^4$ appartienne à F.

Exercice 17 Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même ayant pour matrice par rapport à la base canonique (e_1, e_2, e_3)
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que les vecteurs $v_1 = (1, 0, -1)$, $v_2 = (0, 1, 1)$ et $v_3 = (1, 0, 1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer $f(v_1)$, $f(v_2)$, $f(v_3)$ et en déduire la matrice A' de f dans la base (v_1, v_2, v_3).
3. Calculer les puissances A'^n de A' et en déduire A^n, pour tout entier $n \geqslant 1$.

Exercice 18 Soit I la matrice identité d'ordre 3 et soit
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer la matrice A^2 et trouver deux réels α et β tels que $A^2 = \alpha A + \beta I$.

2. Trouver, sans calculer explicitement ces matrices, des décompositions analogues de A^3 et A^4 puis établir par récurrence une expression $A^n = \alpha_n A + \beta_n I$ pour tout entier $n \geqslant 1$. En déduire les matrices A^n.
3. Montrer de même que A est inversible à l'aide de la formule du 1) et calculer son inverse.

Exercice 19 Soient a, b, c des réels. Calculer, en précisant clairement les opérations effectuées, les déterminants

a) $\begin{vmatrix} a+b & a+2b & a+3b \\ a & a+b & a+b \\ a-b & a+b & a \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 8 \\ 4 & 5 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ \cos a & \cos 2a & \cos 3a \\ \cos 2a & \cos 3a & \cos 4a \end{vmatrix}$.

Exercice 20 Soit a un paramètre réel. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & a+2 \\ a & a & -1 \end{pmatrix}.$$

Trouver les valeurs de a pour lesquelles A est inversible et calculer alors son inverse au moyen des déterminants.

Exercice 21 Soit A une matrice $n \times n$.

1. Si $n = 2$, exprimer $\det(A)$ à l'aide de $\mathrm{Tr}(A)$ et $\mathrm{Tr}(A^2)$.
2. Si $n = 3$, exprimer $\det(A)$ à l'aide de $\mathrm{Tr}(A)$ et $\mathrm{Tr}(A^2)$ et $\mathrm{Tr}(A^3)$.