Intégrales impropres

L'objet de ce cours est d'étendre la notion d'intégrale à des situations ou elle n'a pas été définie en cours de première année. On supposera donc connues la définition, et les principales propriétés de l'intégrale d'une fonction continue, ou éventuellement continue par morceaux sur in intervalle compact $[a, b]$.
On veut étendre la définition à deux cas, : l'intervalle n'est pas nécessairement compact, c'est à dire qu'il est par exemple de la forme $[a, +\infty[$, ou de la forme $]a, b[$, et la fonction n'est pas bornée. Commençons par traiter un cas simple.

1 Extension par continuité

Soit f une fonction de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$ qui est continue (éventuellement par morceaux) . Supposons de plus que la limite de de f quand x tend vers a par valeurs supérieures existe et est égale à α, et que la valeur de f quand x tend vers b par valeurs inférieures existe et vaut β. Soit F la fonction de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ qui est égale à f sur $]a, b[$ et telle que $F(a) = \alpha$, $F(b) = \beta$, la fonction F est continue c'est le seul prolongement par continuité de f à $[a, b]$. On peut donc définir

$$\int_a^b F(x)dx$$

Définition 1.1. *Par définition*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b F(t)dt$$

En fait on peut donner la définition plus générale suivante :

Définition 1.2. *Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle $[a, b]$. Supposons que f soit égale sur $[a, b]$ à une fonction continue F en dehors d'un nombre fini de points (on peut même prendre une suite infinie $x_0, \ldots, x_n, \ldots$). Alors par définition on pose :*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b F(t)dt$$

On peut évidemment se placer dans le cas d'un intervalle $[a, b[$ ou d'un intervalle $]a, b]$. la définition est analogue, les énoncés qui suivent restent vrais.
La relation de Chasles a lieu :

Proposition 1.3. *Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle $[a, b]$. Supposons que f soit égale sur $[a, b]$ à une fonction continue F en dehors d'un nombre fini de points (on peut même prendre une suite infinie $x_0, \ldots, x_n, \ldots$). Soit $a \leq c \leq b$, alors*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

- Soit $x \ln(x)$ que l'on considère sur $]0, 1]$, f tend vers 0 quand x tend vers 0 par valeur supérieure. On peut donc considérer la fonction F égale à f sur $]]0, 1$ et à 0 en 0. On aura (par intégration par partie) $\int_0^1 t \ln(t)dt = -\frac{1}{4}$.

- De la même manière on montre que l'intégrale de $\frac{\sin(x)}{x}$ est définie par extension par continuité sur $[0, a]$.

Enfin :

Proposition 1.4. *On a si f est positive ou nulle sur $[a, b]$ sauf en un nombre fini de points (ou sur une suite de points)*

$$\int_a^b f(t)dt \geq 0$$

de plus pour toute fonction f

$$|\int_a^b f(t)dt| \geq \int_a^b |f|(t)dt$$

2 Fonction non bornée

Considérons maintenant le cas suivant, une fonction définie continue (éventuellement par morceaux) sur un intervalle $]a, b]$ mais qui n'a pas de limite quand x tend vers a.

Définition 2.1. *On dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)dt$ converge sur $]a, b]$ (ou existe) si*

$$\int_x^b f(t)dt$$

tend vers une limite I quand x tend vers a (par valeurs supérieures). Alors on note :

$$\int_x^b f(t)dt = I$$

Si elle ne converge pas on dit qu'elle diverge.
On dit que l'intégrale impropre de f converge absolument sur $]a, b]$ (ou existe) si

$$\int_x^b |f(t)|dt$$

tend vers une limite quand x tend vers a par valeurs supérieures.

Théorème 2.2. *Si l'intégrale converge absolument elle converge. La réciproque est fausse.*

Le cas particulier suivant est particulièrement important. On se place dans le cas où $a = 0$, $b > 0$ et

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$$

Théorème 2.3. *L'intégrale précédente, appelée intégrale de Riemann, converge si et seulement si $\alpha < 1$.*

Pour le démontrer il suffit de revenir à la définition et de se souvenir qu'une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$$

si $\alpha \neq 1$ et $\ln(x)$ si $\alpha = 1$. Or parmi ces dernières fonctions les seules qui ont une limite quand x tend vers 0 sont les fonctions

$$\frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$$

avec $\alpha < 1$.
Par exemple on trouve

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = [2\sqrt{t}]_0^1 = 2$$

Plus généralement :

Théorème 2.4. *L'intégrale*

$$\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha} dt$$

converge si et seulement si $\alpha < 1$

Dans tous ces cas puisque les fonctions sont positives il y a équivalence entre convergence et convergence absolue.
Notons enfin que la relation de Chasles a lieu dans ce contexte et que

Proposition 2.5. *Si* f *prend des valeurs positives ou nulles*

$$\int_a^b f(t)dt \geq 0$$

pour toute fonction f

$$|\int_a^b f(t)dt| \geq \int_a^b |f(t)|dt$$

3 Intervalle non borné

Considérons maintenant le cas suivant, une fonction définie continue (éventuellement par morceaux) sur un intervalle $[a, +\infty[$.

Définition 3.1. *On dit que l'intégrale impropre* $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *converge sur* $[a, +\infty[$ *si*

$$\int_a^x f(t)dt$$

tend vers une limite I *quand* x *tend vers* $+\infty$ *. Alors on note*

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = I$$

Si elle ne converge pas on dit qu'elle diverge.
On dit que l'intégrale impropre de f *converge absolument sur* $[a, +\infty]$ *(ou existe) si*

$$\int_0^{+\infty} |f(t)|dt$$

tend vers une limite quand x *tend vers* $+\infty$ *par valeurs supérieures.*

Théorème 3.2. *Si l'intégrale converge absolument elle converge. La réciproque est fausse.*

Par exemple on peut montrer que
$$\int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$$
tend vers $\frac{\pi}{2}$ quand x tend vers $+\infty$ mais que l'intégrale ne converge absolument, c'est-à-dire que
$$\int_0^x |\frac{\sin(t)}{t}| dt$$
n'a pas de limite.

Le cas particulier suivant est particulièrement important. On se place dans le cas où $a > 0$, et
$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$$

Théorème 3.3. *L'intégrale précédente, appelée intégrale de Riemann, converge si et seulement si $\alpha > 1$.*

Pour le démontrer il suffit de revenir à la définition et de se souvenir que qu'une primive de f est donnée par $F(x) = \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$ si $\alpha \neq 1$ et $\ln(x)$ si $\alpha = 1$. Or parmi ces dernières fonctions les seules qui ont une limite quand x tend vers $+\infty$ sont les $\frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$ avec $\alpha > 1$.

Théorème 3.4. *Soit $a' > a$. L'intégrale*
$$\int_{a'}^{+\infty} \frac{1}{(t-a)^\alpha} dt$$
converge si et seulement si $\alpha > 1$

Dans ces cas puisque les fonctions sont positives il y a équivalence entre convergence et convergence absolue.
Les résultats s'étendent évidemment si on considère des intervalles de la forme $]-\infty, a]$.
On a évidemment relation de Chasles et inégalités.

4 Théorèmes de comparaison

On a les résultats suivants :
Considérons deux fonctions f et g continues à valeurs positives ou nulles. Supposons que pour tout x dans l'intervalle de définition on ait $f(x) \leq g(x)$.
On suppose que l'intervalle de définition est soit de la forme $]a, b]$, soit de la forme $[a, +\infty[$.

Théorème 4.1. *Si l'intégrale de f diverge il en est de même de l'intégrale de g.*
Si l'intégrale de g converge il en est de même de l'intégrale de f .

Il est souvent commode d'utiliser :

Théorème 4.2. *Si la limite de la fonction $\frac{f(x)}{g(x)}$ existe et est non nulle quand x tend vers a (resp. vers $+\infty$) l'intégrale de f et celle de g sont de même nature.*
Si la limite de la fonction $\frac{f(x)}{g(x)}$ existe et est nulle quand x tend vers a (resp. vers $+\infty$) si l'intégrale de g converge il en est de même et celle de f.

Notons que ces théormes sont énoncés pour des fonctions à valeurs positives ou nulles, il y a donc équivalence entre convergence et convergence absolue.

5 Exemples

Voici des exemples

- L'intégrale suivante est elle convergente :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\ln(x)(x^2+1)}dx$$

  Il faut d'abord déterminer où se trouvent les problèmes. L'intervalle est non borné, mais de plus la fonction n'est pas définie en 0 et 1. Il y a trois problèmes concernant cette intégrale, en 0, 1, et l'infini. On va donc diviser l'intégrale en 4 parties que l'on va étudier à part.

  D'abord entre 0 et $\frac{1}{2}$. En 0 la fonction se prolonge par continuité par 0, comme le logarithme au dénominateur tend vers $-\infty$. L'intégrale

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\ln(x)(x^2+1)}dx$$

  est donc convergente.

  Puis entre e et $+\infty$. En $+\infty$ la fonction est positive et équivalente à $\frac{1}{\ln(x)(x^2)}$ qui est inférieure si $x > e$ ($\ln(e) = 1$) à $\frac{1}{x^2}$. Donc

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{\ln(x)(x^2+1)}dx$$

  est donc convergente.

  Le point le plus délicat est en 1 car la fonction au dénominateur est nulle. Considérons la fonction entre $\frac{1}{2}$ et 1. Si on pose $x = 1+u$ alors $\frac{1}{\ln(x)(x^2+1)}$ est équivalente quand x tend vers 1 (c'est-à-dire u tend vers 0) à $\frac{1}{2u}$. On obtient ceci par développement limité. On en déduit que l'intégrale

$$\int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{1}{\ln(x)(x^2+1)}dx$$

  n'a pas de limite quand x tend vers 1 par comparaison à une série de Riemann.

  On aurait un résultat analogue sur $]1, e]$.

  Pour que l'intégrale converge il faudrait qu'elle le fasse sur chacun de ces intervalles. En conclusion l'intégrale ne converge pas.

- Etudier la convergence et calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx$$

  Ainisi qu'on l'a dit la fonction s'étend par continuité en 0, il y a donc seulement problème en $+\infty$.

Etudions d'abortd la convergence absolue. Considérons l'intervalle $[k\pi, (k+1)\pi]$, sur le sous-intervalle $[k\pi + \frac{\pi}{4}, (k+1)\pi - \frac{\pi}{4}]$ on a :

$$|\frac{\sin(x)}{x}| \geq \frac{1}{(k+\frac{1}{4})2\sqrt{2}}$$

il suit que

$$\int_0^{(n+1)\pi} |\frac{\sin(x)}{x}|dx \geq \sum_1^n \frac{1}{(k+\frac{1}{4})2\sqrt{2}}$$

Or ainsi qu'on le verra plus loin que la quantité à droite tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Cependant l'intégrale converge. Pour le démontrer on procédera comme suit. On scindera l'intégrale en deux, sur $[0,1]$ et $[1,a]$. Sur le premier intervalle il y a prolongement par continuité. Sur le second on montre à l'aide d'une intégration par partie qu'il y a une limite quand a tend vers $+\infty$.

Voici les étapes d'une façon de calculer la valeur de l'intégrale. Ceci suppose des résultats qui seront énoncés ultérieuremnt.

On montre que pour tout $x > 0$ que la fonction

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t+x}dt$$

vérifie l'équation différentielle

$$y + y" = \frac{1}{x}$$

Pour cela on commence par démontrer que la fonction est 2 fois dérivable et que

$$f'(x) = \int_x^{+\infty} \frac{-\cos(t-x)}{t}dt$$

et

$$f"(x) = \int_x^{+\infty} \frac{-\sin(t-x)}{t}dt + \frac{1}{x}$$

pour $x > 0$.

On montre maintenant que la fonction

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}$$

satisfait à la même équation différentielle, puis qu'elle est égale à $f(x)$.

On commence par montrer que la fonction est deux fois dérivables. En fait on montre que :

$$g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-te^{-tx}}{1+t^2}$$

et

$$g"(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-tx}}{1+t^2}$$

On montre ensuite que g tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

En conclure que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

- Existence et calcul de

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x)) dx$$

et

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x)) dx$$

On notera que $I = J = \frac{I+J}{2}$.

- Montrer le

Théorème 5.1. *Soit f une fonction réelle définie continue sur $[0, +\infty[$ décroissante tendant vers 0 quand x tend vers $+\infty$ (donc elle est à valeurs positives). Alors l'intégrale*

$$\int_0^{+\infty} f(x) \sin(x) dx$$

est convergente.

La démonstration est analogue, et utilise, celle du critères des séries alternées qui sera donnée plus tard.