

# Séries à termes positifs

Dans toute la suite  $\mathbb{N}$  désignera les entiers naturels positifs  $0, 1, 2, \dots$ ,  $\mathbb{Z}$  tous les entiers naturels  $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$  et  $\mathbb{Q}$  les nombres rationnels.

Enfin  $\mathbb{R}$  désignera les réels, et  $\mathbb{C}$  les complexes.

## 1 Définitions

**Définition 1.1.** Soit une suite réelle  $(u_n)$  dont tous les termes sont positifs ou nuls, soit  $(s_n)$  la suite définie par :

$$s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{i=0, \dots, n} u_i$$

On dit que la série de terme général  $u_n$  converge vers  $s$  si la suite  $(s_n)$  converge vers  $s$  qui est appelé la somme de la série. Les  $(s_n)$  sont appelés les sommes partielles.

Si  $(s_n)$  n'a pas de limite on dit que la série diverge.

Dans tout ce chapitre les séries seront supposées de ce type *i.e.* à termes positifs.

**Exemple (Série géométrique) :**

L'exemple suivant est fondamental : si on prend  $u_n = \alpha^n$  on a ce qu'on appelle la série géométrique. Alors  $s_n = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$  (si  $\alpha \neq 1$ ).

Si  $\alpha < 1$ ,  $\alpha^{n+1}$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini, la série converge, sa somme est  $\frac{1}{1-\alpha}$ .  
Si  $\alpha > 1$ ,  $\alpha^{n+1}$  tend vers  $+\infty$  quand  $n$  tend vers l'infini, la série diverge car  $s_n$  n'a pas de limite.

Si  $\alpha = 1$  alors  $s_n = n + 1$ , il y a divergence.

Les  $u_n$  peuvent dans certains cas n'être défini que à partir d'un entier  $n_0$ . Dans ce cas on ne considère les  $s_n$  que pour  $n \geq n_0$  et  $s_n = \sum_{i=n_0, \dots, n} u_i$ .

**Théorème 1.2.** (Critère grossier de convergence) Pour qu'une série de terme général  $u_n$  converge il faut que la suite  $(u_n)$  tende vers 0.

C'est une application du critère de Cauchy pour les suites. La condition est seulement nécessaire. En fait on verra que la série de terme général  $\frac{1}{n}$  définie pour  $n > 0$  diverge, bien que la suite  $(\frac{1}{n})$  tende vers 0.

- la série de terme général  $u_n = n^{\frac{1}{n}}$  ne converge pas : la limite de  $n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln(n)}{n}}$  vaut 1 quand  $n$  tend vers l'infini, car la limite de  $\frac{\ln(n)}{n}$  vaut 0 quand  $n$  tend vers l'infini.
- Il en est de même pour  $u_n = n^{\frac{2}{\sqrt{n}}}$ .

Voici une condition nécessaire et suffisante :

**Théorème 1.3.** (Critère de Cauchy) Pour que la série de terme général  $u_n$  converge il faut et suffit que pour tout  $\epsilon > 0$  on puisse trouver un entier  $N_\epsilon$  tel que pour tout  $p \geq q \geq N_\epsilon$  on ait  $u_q + \dots + u_p \leq \epsilon$ .

La démonstration est une application du critère de Cauchy pour les suites.

Par exemple ceci permet de montrer la série de terme général  $(\frac{1}{n})$  ne converge pas. En effet il suffit de considérer la somme des termes  $n$  à  $2n$  de la série, soit

$$\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{2n}$$

Cette somme est toujours supérieure à  $\frac{1}{2}$ . La série ne peut donc satisfaire au critère de Cauchy.

Etant donnée deux séries de terme généraux  $u_n$  et  $v_n$  la somme des deux séries est la série de terme général  $u_n + v_n$ . Cette dernière série converge si et seulement si les deux séries  $u_n$  et  $v_n$  convergent. Dans ce cas la somme de la série est la somme des deux séries initiales.

Si  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  on peut aussi multiplier la série de terme général  $u_n$  par  $\lambda$ , c'est la série de terme général  $\lambda u_n$ .

## 2 Comparaison de séries

On a :

**Théorème 2.1.** *Soient deux séries à termes positifs  $u_n$  et  $v_n$ . Supposons que pour tout  $n$  on ait  $u_n \leq v_n$ .*

*Si la série de terme général  $v_n$  converge il en est de même pour la série de terme général  $u_n$ .*

*Si la série de terme général  $u_n$  diverge il en est de même pour la série de terme général  $v_n$ .*

Il suffit que la condition  $u_n \leq v_n$  soit satisfaite pour tout  $n$  assez grand. On a aussi

**Corollaire 2.2.** *Soient deux séries à termes positifs  $u_n$  et  $v_n$ . Supposons que  $v_n \neq 0$  (au moins dès que  $n$  est assez grand). Supposons que la limite de  $\frac{u_n}{v_n}$  existe et est non nulle. Alors si la série de terme général  $v_n$  converge il en est de même pour la série de terme général  $u_n$ , si la série de terme général  $u_n$  diverge il en est de même pour la série de terme général  $v_n$ . On dit que les deux séries sont de même nature.*

- On peut appliquer ce résultat aux séries de termes généraux  $\frac{1}{n}$  et  $\frac{1}{n+1}$ ,
- ainsi qu'à celles de termes généraux  $\frac{1}{n^3}$  et  $\frac{1}{n^3 + n + 1}$
- et celles de termes généraux à  $\frac{1}{n^2}$  et  $\frac{1}{n^2 + \ln(n)}$ .

Comme pour le cas des intégrales on pourrait écrire un énoncé avec une limite 0.

On a aussi :

**Corollaire 2.3.** *Soient deux séries à termes positifs  $u_n$  et  $v_n$ , supposons que pour tout  $n$  assez grand  $v_n \neq 0$  (au moins dès que  $n$  est assez grand). Supposons que pour tout  $n$  assez grand  $0 < m \leq \frac{u_n}{v_n} \leq M$ , pour des réels  $0 < m$  et  $m \leq M$ .*

*Alors les deux séries sont de même nature.*

- On peut appliquer ce résultat aux séries de termes généraux  $u_n$  telle que :  $u_{2n} = \frac{1}{2n}$  et  $u_{2n+1} = \frac{1}{n}$  et  $v_n$  telle que  $v_n = \frac{1}{n}$ .

### 3 Règles de Cauchy et d'Alembert

**Théorème 3.1.** (Règle de Cauchy 1) Soit une série de terme général  $u_n$ . Si la limite de  $u_n^{\frac{1}{n}}$  existe et est strictement inférieure à 1 la série converge.

Soit une série de terme général  $u_n$ . Si la limite de  $u_n^{\frac{1}{n}}$  existe et est strictement supérieure à 1 la série diverge.

**Théorème 3.2.** (Règle de d'Alembert 1) Soit une série de terme général  $u_n$ . Si la limite de  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  existe et est strictement inférieure à 1 la série converge.

Soit une série de terme général  $u_n$ . Si la limite de  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  existe et est strictement supérieure à 1 la série diverge.

Dans les deux cas on ne peut rien dire si la limite vaut 1.

Par contre on peut on peut généraliser comme suit :

**Théorème 3.3.** (Règle de Cauchy 2) Soit une série de terme général  $u_n$ . Si  $u_n^{\frac{1}{n}}$  est inférieur à  $c < 1$  dès que  $n$  est assez grand la série converge.

Soit une série de terme général  $u_n$ . Si  $u_n^{\frac{1}{n}}$  est supérieur à  $c > 1$  dès que  $n$  est assez grand la série diverge.

Il suffit en fait dans ce dernier cas que  $u_n^{\frac{1}{n}} \geq c > 1$  pour une infinité d'entiers  $n$ .

**Théorème 3.4.** (Règle de d'Alembert 2) Soit une série de terme général  $u_n$ . Si  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  est inférieur à  $c < 1$  dès que  $n$  est assez grand la série converge.

Soit une série de terme général  $u_n$ . Si la limite de  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  est supérieur à  $c > 1$  dès que  $n$  est assez grand la série diverge.

La démonstration de ces théorèmes procède par comparaison aux séries géométriques.

- Le premier exemple d'application de la règle de d'Alembert est le cas de la série de terme général  $u_n = \frac{1}{n!}$ . Le rapport vaut  $\frac{1}{n+1}$  et tend vers 0, la série converge.
- la règle de Cauchy s'applique évidemment aux séries géométriques, on peut l'appliquer à la série de terme général  $u_n = \frac{1}{n^n}$
- Par contre on vérifiera que si  $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$  la limite des deux quantités considérées existe bien et vaut (quelquesoit  $\alpha$ ) 1. On ne peut pas conclure.

### 4 Comparaison aux intégrales impropres

Les séries dont le terme général (défini pour  $n \geq 1$ ) est de la forme  $\frac{1}{n^\alpha}$  ne rentrent pas comme on l'a dit dans le cadre des règles de Cauchy et d'Alembert. On appelle ces séries séries de Riemann. Pour déterminer leur nature on compare à une intégrale. Pour ce faire on utilise le théorème suivant

**Théorème 4.1.** Soit  $f$  une fonction de  $[1, +\infty[$  dans  $\mathbb{R}^+$  (réels positifs ou nuls). On suppose que  $f$  est continue décroissante et tend vers 0 quand la variable tend vers  $+\infty$ . Alors l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} f(t) dt$$

et la série de terme général  $f(n)$  (définie pour  $n \geq 1$ ) sont de même nature.

En fait la condition que la fonction tende vers 0 n'est pas nécessaire pour le théorème, simplement dans ce cas la série et l'intégrale divergent.

La démonstration du théorème est conséquence des inégalités

$$f(1) + f(2) + \dots + f(n-1) \geq \int_1^n f(t) dt \geq f(2) + f(3) + \dots + f(n)$$

**Corollaire 4.2.** La série de Riemann de terme général  $\frac{1}{n^\alpha}$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$ .

La démonstration du corollaire vient de ce que :

$$\int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \left[ \frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}} \right]_1^x = \frac{1}{1-\alpha} \left( \frac{1}{x^{1-\alpha}} - 1 \right)$$

si  $\alpha \neq 1$ . Et

$$\int_1^x \frac{dt}{t} = [\ln(t)]_1^x = \ln(x)$$

Evidemment ces intégrales ne convergent que si  $\alpha > 1$ . Voici des applications utilisant aussi ce qui a été dit avant :

- soit  $u_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}} + \ln(n)}$   $n \geq 2$ , comparons à la série de terme général  $v_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ .

La limite de  $\frac{u_n}{v_n}$  vaut 1 quand  $n$  tend vers l'infini. La seconde série est convergente d'après le corollaire donc la première l'est.

- soit  $u_n = \frac{1}{n \ln(n)}$   $n \geq 2$ . Une primitive de  $\frac{1}{x \ln(x)}$  est  $\ln(\ln(x))$ . Ce qui permet de montrer que

$$\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t \ln(t)}$$

diverge, la série diverge donc (remarque : il faut évidemment vérifier les conditions sur la fonction  $\frac{1}{x \ln(x)}$ ).

- soit  $u_n = \frac{1}{n \ln(n)^2}$   $n \geq 2$ . Une primitive de  $\frac{1}{x \ln(x)^2}$  est  $\frac{1}{\ln(x)}$ . Ce qui permet de montrer que

$$\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t (\ln(t))^2}$$

converge, la série converge donc.

- On laisse le cas de  $u_n = \frac{\sin(n) + \log(n)}{n^3}$  en exercice.

## 5 Produits de séries

Etant donnée une série de terme général  $u_n$  et série de terme général  $v_n$  la série produit est la série de terme général  $p_n = u_0v_n + u_1v_{n-1} + \dots + u_0v_n + u_nv_0$ .

**Théorème 5.1.** *Si les séries de termes généraux  $u_n$  et  $v_n$  convergent il en est de même pour la série de terme général  $p_n$ . La somme de cette série est le produit des sommes des séries initiales.*

## 6 Utilisation des développements limités

Une méthode classique pour déterminer la nature d'une série est de faire un développement limité.

- Considérons un exemple : la série de terme général  $u_n = 1 - \cos(\frac{1}{n})$ . Quand  $n$  tend vers l'infini  $\frac{1}{n}$  tend vers 0 et

$$\cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1 + \epsilon\left(\frac{1}{n}\right)}{2n^2}$$

avec  $\epsilon\left(\frac{1}{n}\right)$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini. Donc

$$u_n = \frac{1 + \epsilon\left(\frac{1}{n}\right)}{2n^2}$$

et si  $v_n = \frac{1}{n^2}$ , la limite de  $\frac{u_n}{v_n}$  vaut  $\frac{1}{2}$ . Donc les séries  $u_n$  et  $v_n$  ont même nature. Comme  $v_n$  converge  $u_n$  converge.

- Considérons un autre exemple : la série de terme général  $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ . Quand  $n$  tend vers l'infini  $\frac{1}{n}$  tend vers 0 et

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1 + \epsilon\left(\frac{1}{n}\right)}{6n^3}$$

avec  $\epsilon\left(\frac{1}{n}\right)$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini. Donc

$$u_n = \frac{1 + \epsilon\left(\frac{1}{n}\right)}{6n^{\frac{5}{2}}}$$

et si  $v_n = \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$  la limite de  $\frac{u_n}{v_n}$  vaut  $\frac{1}{6}$ . Donc la série  $u_n$  de même nature que  $\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$  qui converge.

## 7 Quelques exemples

- $u_n = n2^{-\sqrt{n}}$ . Dans ce cas les règles de d'Alembert et Cauchy ne s'applique pas car les limites considérées valent 1. Il faut faire une comparaison à une série de Riemann. Comme  $n^32^{-\sqrt{n}}$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini le terme général de la série (positif) est inférieur à  $\frac{1}{n^2}$  pour tout  $n$  assez grand donc la série converge. Cette méthode s'appliquerait si on remplaçait  $n2^{-\sqrt{n}}$  par  $n^a\lambda^{-\sqrt{n}}$  pour  $a$  quelconque et  $\lambda > 1$  car  $n^2n^a\lambda^{-\sqrt{n}}$  tend alors vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini et donc le terme  $n^a\lambda^{-\sqrt{n}}$  est inférieur à  $1/n^2$  pour tout  $n$  assez grand et donc la série de terme général  $n^a\lambda^{-\sqrt{n}}$  converge (sous les hypothèses indiquées plus haut).

- $u_n = \frac{|\sin(n)| + \log(n)}{n^3 + \cos(n)}$

On peut séparer la série en deux termes, on écrit que :

$$\frac{|\sin(n)| + \log(n)}{n^3 + \cos(n)} = \frac{|\sin(n)|}{n^3 + \cos(n)} + \frac{\log(n)}{n^3 + \cos(n)}$$

et on montre la convergence des séries associées aux deux termes du membre de droite.

Dans le terme ci-dessus  $\frac{|\sin(n)|}{n^3 + \cos(n)}$  est inférieur ou égal à  $\frac{1}{n^3 - 1}$  qui converge par comparaison à la série de Riemann de terme général  $\frac{1}{n^3}$ . On remarquera que dans l'argument ce qui est important est que  $|\sin(n)| \leq 1$ , l'argument fonctionnerait à l'identique en remplaçant  $\sin(n)$  par  $f(n)$  pourvu que la fonction  $f(n)$  soit bornée en valeur absolue (on pourrait prendre par exemple  $\sin^2(n)$  ou  $\sin^3(n)$ ).

Concernant le terme  $\frac{\log(n)}{n^3 + \cos(n)}$  il faut se souvenir que la limite de  $\frac{\log(n)}{n}$  quand  $n$  tend vers l'infini vaut 0. On en déduit que la limite de  $n^2 \frac{\log(n)}{n^3 + \cos(n)}$  quand  $n$  tend vers l'infini vaut 0, donc le terme général  $\frac{\log(n)}{n^3 + \cos(n)}$  est inférieur à  $\frac{1}{n^2}$  pour tout  $n$  assez grand, comme il est positif il y a convergence absolue de la série associée. On pourrait remplacer  $\log(n)$  par toute fonction  $f$  telle que limite de  $\frac{f(n)}{n}$  quand  $n$  tend vers l'infini vaut 0.

- $\sin(\operatorname{sh}(\frac{1}{n})) - \operatorname{sh}(\sin(\frac{1}{n}))$ . On rappelle que  $\operatorname{sh}(u) = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$ . Ce cas est à traiter par les développements limités, on développe  $\sin(\frac{1}{n})$  et  $\operatorname{sh}(\frac{1}{n})$  à l'ordre 3. On a  $\sin(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^3} + \frac{\epsilon(\frac{1}{n})}{n^3}$  et  $\operatorname{sh}(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^3} + \frac{\epsilon(\frac{1}{n})}{n^3}$ . En portant dans l'expression on constate que les termes en  $\frac{1}{n}$  se détruisent, donc le terme général est de la forme  $\frac{a + \epsilon(\frac{1}{n})}{n^3}$  donc est convergent (quelle que soit la valeur de  $a \in \mathbf{R}$ ).