Séries à termes quelconques réels ou complexes

1 Définitions, convergence simple et absolue

Définition 1.1. *Soit une suite réelle ou complexe (u_n), soit (s_n) la suite telle que*

$$s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{i=0,\ldots,n} u_i$$

On dit que la série de terme général u_n converge simplement vers s si la suite (s_n) converge vers s qui est appelé la somme de la série. Les (s_n) sont appelés les sommes partielles. Si (s_n) n'a pas de limite on dit que la série diverge.

On a le théorème suivant

Théorème 1.2. *(Critère de Cauchy de convergence) Pour que la série de terme général u_n converge il faut et suffit que pour tout $\epsilon > 0$ on puisse trouver un entier N_ϵ tel que pour tout $p \geq q \geq N_\epsilon$ on ait $|u_q + \ldots + u_p| \leq \epsilon$.*

Définition 1.3. *Soit une suite réelle ou complexe (u_n). On dit que la série de terme général u_n est absolument convergente si la série de terme général $|u_n|$ converge, ici $|a|$ désigne celon le cas la valeur absolue ou le module.*

On a :

Théorème 1.4. *(Critère grossier de convergence absolue) Pour qu'une série de terme général u_n converge absolument il faut que la suite $(|u_n|)$ tende vers 0.*

La condition est seulement nécessaire.

Voici une condition nécessaire et suffisante :

Théorème 1.5. *(Critère de Cauchy de convergence absolue) Pour que la série de terme général u_n converge absolument il faut et suffit que pour tout $\epsilon > 0$ on puisse trouver un entier N_ϵ tel que pour tout $p \geq q \geq N_\epsilon$ on ait $|u_q| + \ldots + |u_p| \leq \epsilon$.*

Proposition 1.6. *Une série qui converge absolument converge simplement.*

C'est une application du critère de Cauchy et de l'inégalité triangulaire :

$$|u_q| + \ldots + |u_p| \geq |u_q + \ldots + u_p|$$

On verra plus loin qu'il peut y avoir convergence simple sans convergence absolue.

Exemple (Série géométrique) :

Si on prend $u_n = \alpha^n$ alors $s_n = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$ (si $\alpha \neq 1$).
Si $|\alpha| < 1$, la série converge absolument et donc simplement, sa somme est $\frac{1}{1-\alpha}$.
Si $|\alpha| > 1$, $|\alpha^n|$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini. Il n'y a ni convergence absolue, ni convergence simple.
Si $|\alpha| = 1$ il y a divergence car le terme général ne tend pas vers 0.

Quand on multiplie une série par un csalaire non nul on ne change pas sa nature quant à la convergence absolue et la convergence simple.
La somme des deux séries convergent absolument si et seulement si les deux séries initiales convergent absolument.
La somme des deux séries qui convergent simplement converge simplement.
Par contre il n'est pas vrai que si la somme de deux séries converge simplement les deux séries initiales convergent simplement. Il suffit pour s'en convaicre de considérer le cas de $u_n = 2^n$ qui diverge et de la série oppsée $v_n = -2^n$; la somme des deux vaut 0.

2 Règles de convergences absolues

Les rgles de Cauchy et d'Alembert décrites précédemment s'appliquent, pourvu que 'on remplace u_n par son module $|u_n|$.

3 Séries alternées

Définition 3.1. *On dit qu'une série réelle de terme général u_n est alternée si*

- $u_n = (-1)^n v_n$, *avec* $v_n \geq 0$*;*
- $v_n \geq v_{n+1}$ *pour tout* n*;*
- *la suite* v_n *tend vers* 0 *quand* n *tend vers l'infini.*

L'exemple fondamental est celui de $u_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$ appelé série harmonique.
On peut généraliser un peu la définition en supposant seulement que les deux premières conditions n'ont lieu que pour tout n assez grand. Le théorème suivant a lieu sous cette hypothèse plus générale :

Théorème 3.2. *Toute série alternée converge simplement.*

Corollaire 3.3. *La série harmonique converge. Mais elle ne converge pas absolument!*

En fait sa somme est $\ell n(2)$.
Voici d'autres exemples.

- $u_n = \dfrac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}}$. Ce cas se traite par application directe du critère des séries alternées, il y a convergence simple. Ne pas oublier de vérifier les deux conditions, à savoir décroissance et limite 0.
- Plus généralement soit la série de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{P(n^{\frac{1}{k}})}$$

Où P est un polynôme dont le coefficient du terme de plus haut degré est positif, et $k \geq 0$ un entier fixé. En général on ne peut pas dire que cette série converge absolument.

En fait elle converge absolument pour $k < \deg(P)$.

Elle converge toujours simplement. En effet la fonction $P(x^{\frac{1}{k}})$ est croissante dès que x est assez grand, car sa dérivée est $\frac{1}{k}x^{\frac{1}{k}-1}P'(x^{\frac{1}{k}})$ or on sait que P' est positif pour tout y assez grand puisque le signe de son terme de plus haut degré est positif.

Donc la fonction inverse est décroissante (et tend vers zéro) pour tout x assez grand, ce qui suffit pour appliquer le critère.

- $u_n = (-1)^n(\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{n})$, exercice.

On applique ce résultat à l'étude des intégrales

$$\int_0^{+\infty} f(t)\sin(t)dt$$

avec les hypothèses adéquates sur f.

4 Règle d'Abel

Il s'agit d'une généralisation de la règle des séries alternées au cas des séries complexes. Il y a plusieurs façons de présenter l'énoncé, en voici une.

Théorème 4.1. *(Régle d'Abel) Soit une série complexe de terme général* u_n*. On suppose que*

$u_n = c_n v_n$*, avec* v_n *réel positif.;*

- $v_n \geq v_{n+1}$ *pour tout* n*;*
- *la suite* v_n *tend vers* 0 *quand* n *tend vers l'infini;*
- *enfin il existe une constante* M *telle que pour tout* $0 \leq p \leq q$ $|c_p + \ldots + c_q| \leq M$*.*

Alors la série converge simplement.

La démonstration se base sur le critère de Cauchy.Soit $p \leq q$, considérons la quantité :

$$|c_p v_p + \ldots + c_q v_q|$$

on pose

$$C_{p,q} = c_p + \ldots + c_q$$

et donc

$$c_q = C_{p,q} - C_{p,q-1}$$

En substituant dans l'expression on a

$$c_p v_p + \ldots + c_q v_q = c_p v_p + \ldots + (C_{p,i} - C_{p,i-1})v_i + \ldots + (C_{p,q} - C_{p,q-1})v_q$$

donc

$$c_pv_p + \ldots + c_qv_q = c_p(v_p - v_{p+1}) + C_{p,p+1}(v_{p+1} - v_{p+2}) + \ldots + C_{p,q-1}(v_{q-1} - v_q) + C_{p,q}v_q$$

On a donc pour les modules

$$|c_pv_p+\ldots+c_qv_q| \leq |c_p|(v_p-v_{p+1})+|C_{p,p+1}|(v_{p+1}-v_{p+2})|+\ldots+|C_{p,q-1}|(v_{q-1}-v_q)|+|C_{p,q}|v_q$$

rappellons que $v_i - v_{i+1} \geq 0$, donc

$$|c_pv_p + \ldots + c_qv_q| \leq M(v_p - v_{p+1}) + M(v_{p+1} - v_{p+2}) + \ldots + M(v_{q-1} - v_q) + v_qM = Mv_p$$

Maintenant comme v_n tend vers 0 si ϵ est donné on peut trouver n_0 tel que si $n \geq n_0$ $0 \leq v_n \leq \frac{\epsilon}{M}$. On a donc montré que si $p, q \geq n_0$ on a $|c_pv_p + \ldots + c_qv_q| \leq \epsilon$, c'est le critère de Cauchy. Ceci démontre le résultat.
On observera que $c_n = (-1)^n$ vérifie la condition requise car dans ce cas $|c_p+\ldots+c_q| \leq 2$.

- Ceci s'applique à $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ avec $c_n = (-1)^n$. Evidemment dans ce cas on pourrait appliquer le critères séries alternées.

- Voici un cas plus intéressant. On prend $c_n = e^{in\theta}$, $e^{i\theta}$ un nombre complexe de module 1, on le suppose distinct de 1 ($\theta \neq 2k\pi$). Alors

  $$c_p + \ldots + c_q = e^{ip\theta}\frac{1 - e^{i(q-p+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}$$

  et donc

  $$|c_p + \ldots + c_q| \leq \frac{2}{|1 - e^{i\theta}|}$$

  car $|e^{ip\theta}| = 1$ et $|1 - e^{i(q-p+1)\theta}| \leq |1| + |e^{i(q-p+1)\theta}| = 2$. Donc en particulier les séries de terme généraux $\frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ sont simplement convergentes.

- La discussion précédente s'applique aussi à $c_n = \cos(n\theta)$ et $c_n = \sin(n\theta)$, car les sommes considérées ne sont autres que les parties réelles et imaginaires des sommes considérées dans l'item précédent; et sont donc bornées en module par la valeur précédente.

- $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + \cos(n)}$. Ce cas est plus délicat, il n'est pas immédiat que $f(x) = \frac{1}{\sqrt{n}+\cos(n)}$ est décroissante. La dérivée est à même signe que $-\frac{1}{2\sqrt{x}} + \sin(x)$ dont le signe n'est pas constant. Donc on ne peut conclure directement. On procède comme suit

  $$\frac{1}{\sqrt{n} + \cos(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}}(\frac{1}{1 + \frac{\cos(n)}{\sqrt{n}}})$$

  On fait un développement limité et on obtient :

  $$\frac{1}{\sqrt{n} + \cos(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{\cos(n)}{n} + \frac{\cos(n)^2 + \epsilon(\frac{1}{n})}{n^{\frac{3}{2}}}$$

  Soit

  $$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + \cos(n)} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{(-1)^n cos(n)}{n} + \frac{(-1)^n \cos(n)^2 + \epsilon(\frac{1}{n})}{n^{\frac{3}{2}}}$$

  La série est somme de trois éries dont la dernière converge absolument par comprarison à une somme de Riemann. La première est une série alternée, la seconde converge d'après la règle d'Abel car $(-1)^n \cos(n) = \cos(n(1 + \pi))$.