

# Séries entières

Dans ce chapitre on va donner la définition et quelques propriétés des séries de fonctions. Puis aussitôt après on se placera dans le cas particulier des séries entières que l'on étudiera en détails.

## 1 Suites et séries de fonctions

Soit  $A$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . En général  $A$  sera soit dans le cas réel un intervalle  $]a - \delta, a + \delta[$ , on pourra aussi considérer le cas de l'intervalle fermé  $[a - \delta, a + \delta]$ . Dans le cas complexe  $A$  sera le disque ouvert,

$$D(a, \delta) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < \delta\}$$

ou le disque fermé

$$\bar{D}(a, \delta) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leq \delta\}$$

$\delta$  est dans les deux cas un réel positif. On considère dans la suite des fonctions de  $A$  de  $A$  dans  $\mathbb{R}$  ou dans  $\mathbb{C}$ .

**Définition 1.1.** Une suite de fonctions de  $A$  dans  $\mathbb{R}$  (resp. dans  $\mathbb{C}$ ) est la donnée d'une famille de fonctions  $u_n : A \longrightarrow \mathbb{R}$  (resp.  $\mathbb{C}$ ),  $i \in \mathbb{N}$ .

**Définition 1.2.** On dit que la suite de fonctions  $(u_n)$  converge simplement si pour tout  $x \in A$  la suite de réels ou de complexes  $(u_n(x))$  converge vers une limite  $\ell(x)$ . Celle-ci est appelée la (fonction) limite.

- La suite telle que  $A = \mathbb{R}$  et  $u_n = |\sin(x)|^n$  converge vers la fonction  $\ell$  telle que  $\ell(x) = 0$  si  $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ , 1 sinon
- La suite telle que  $A = \mathbb{R}$  et  $u_n = \sin(x)^n$  ne converge pas vers une limite car si  $x = (2k + 1)\pi + \frac{\pi}{2}$  les valeurs prises sont  $(-1)^n$  qui ne converge pas.
- La suite telle que  $A = \mathbb{R}^-$  et  $u_n = e^{nx}$  converge vers la fonction  $\ell$  telle que  $\ell(x) = 0$  si  $x < 0$ , 1 si  $x = 0$ .

**Définition 1.3.** On dit que la série de fonctions associée à la suite de fonctions  $(u_n)$  converge simplement si la suite de fonctions des sommes partielles

$$s_n(x) = \sum_{i=0}^{i=n} u_i(x)$$

converge vers une limite qui dans ce cas est appelée la somme  $s(x)$  de la série.

**Définition 1.4.** On dit que la série de fonctions associée à la suite de fonctions  $(u_n)$  (on dit aussi de terme général  $u_n$ ) converge absolument si la suite de fonctions des sommes partielles

$$s_n(x) = \sum_{i=0}^{i=n} |u_i(x)|$$

converge vers une limite.

**Proposition 1.5.** *Si une série de fonctions converge absolument elle converge simplement. La réciproque est fautive.*

- La série de fonctions de terme général  $z^n$  avec  $z \in D(0, 1)$  converge absolument. La somme est  $\frac{1}{1-z}$
- La série de fonctions de terme général  $u_n(z) = \frac{1}{n^z}$  défini pour  $n \geq 1$  et  $\operatorname{Re}(z) > 1$  converge absolument par application du critère des séries de Riemann. Sa somme est appelée la fonction  $\zeta$  de Riemann.

## 2 Séries entières et rayon de convergence

Considérons maintenant  $a \in \mathbb{C}$  et  $(a_n)$  une suite de nombres complexes.

**Définition 2.1.** *Soit  $z \in \mathbb{C}$  la série de fonctions de terme général  $a_n(z - a)^n$  s'appelle une série entière en  $a$ . Les  $a_n$  sont les coefficients de la série entière. Si pour tout  $z \in A$ , où  $A \subset \mathbb{C}$ , elle converge vers une valeur  $s(z)$ , la fonction  $s$  (définie sur  $A$ ) est appelée la somme de la série.*

Dans les exemples qui suivent  $a = 0$ .

- La série entière dont tous les coefficients valent 1 est la série géométrique. Elle converge si  $|z| < 1$ . Sa somme vaut  $\frac{1}{1-z}$ .
- La série entière dont le coefficient  $a_n$  vaut  $\frac{1}{n!}$  est la série exponentielle.

**Théorème 2.2.** *Etant donnée une série entière en  $a$  de terme général  $a_n z^n$  il existe une unique  $\rho$ ,  $\rho \geq 0$  ou  $\rho = +\infty$ , tel que la série converge absolument (et donc converge) si  $z \in D(a, \rho)$  et diverge si  $z \notin \bar{D}(a, \rho)$ . Cette valeur est appelée le rayon de convergence de la série.*

Voici des règles qui permettent de calculer dans la plupart des cas le rayon de convergence. Les limites considérées sont éventuellement  $+\infty$ .

**Proposition 2.3.** (Règle de Cauchy) *Si la limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$  de  $|a_n|^{\frac{1}{n}}$  existe alors :*

$$\rho = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}}$$

**Proposition 2.4.** (Règle de d'Alembert) *Si la limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$  de  $|a_n|^{\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}$  existe alors :*

$$\rho = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}$$

Plus généralement :

**Proposition 2.5.** *Si pour tout  $n$  assez grand  $m \leq |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq M$  existe alors :*

$$\frac{1}{M} \leq \rho \leq \frac{1}{m}$$

**Proposition 2.6.** *Si Si pour tout  $n$  assez grand  $m \leq \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq M$  existe alors :*

$$\frac{1}{M} \leq \rho \leq \frac{1}{m}$$

On notera que dans toutes ces formules  $a$  ne joue aucun rôle.

Voici des exemples :

- La série entière dont tous les coefficients valent 1 a pour rayon de convergence 1 (règle de Cauchy).
- La série exponentielle a pour rayon de convergence  $+\infty$  ( règle de d'Alembert).
- La série entière dont tous les coefficients  $a_{2n}$  valent 1 et les coefficients  $a_{2n+1}$  valent 0 a pour rayon de convergence 1. On utilise la troisième propriété pour montrer que  $\rho \geq 1$ . Maintenant si  $|z| \geq 1$  le terme général de la série qui est soit  $z^{2n}$  soit 0 ne tend pas vers 0 et on applique alors le théorème 2.2.
- La série entière dont les coefficients (pour  $n > 0$ ) valent  $n^\alpha$  est a pour rayon de convergence 1 par application de la règle de Cauchy.
- La série entière dont les coefficients valent  $k^n$  est a pour rayon de convergence  $\frac{1}{k}$  par application de la règle de d'Alembert.
- La série entière dont les coefficients valent  $n^n$  a pour rayon de convergence 0 par application de la règle de Cauchy.
- La série entière dont les coefficients valent  $n!$  a pour rayon de convergence 0 par application de la règle de d'Alembert.
- La série entière dont les coefficients  $a_{2n}$  valent  $\frac{1}{(2n)!}$ , 0 sinon a pour rayon de convergence  $+\infty$ . En effet en comparant à la série exponentielle il est clair que la série de terme général  $\frac{z^{2n}}{(2n)!}$  pour les valeurs paires, resp. 0 converge pour tout  $z \in \mathbb{C}$ . En fait sa somme est égale à  $\cos(z)$ .

### 3 Opérations sur les séries entières

Etant donnée deux séries entières de termes généraux respectifs  $a_n z^n$  et  $b_n z^n$ , de rayon de convergence respectif  $\rho$  et  $\tau$ , et un scalaire  $\lambda$  on peut faire plusieurs opérations. Multiplier une série par le scalaire, additionner deux séries, faire le produit des deux séries.

On a les résultats suivants

**Proposition 3.1.** *Le rayon de convergence de la série de terme général  $\lambda a_n z^n$ , avec  $\lambda \neq 0$ , est égal à  $\rho$ .*

*Le rayon de convergence de la série de terme général  $(a_n + b_n)z^n$  est supérieur ou égal à  $\inf(\rho, \tau)$ .*

**Proposition 3.2.** *Soit  $p_n = a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \dots + a_0 b_n$ . Le rayon de convergence de la série de terme général  $p_n z^n$  est supérieur ou égal à  $\inf(\rho, \tau)$ .*

On peut ne pas avoir égalité.

Par exemple dans le second cas il suffit d'additionner à une série la série opposée (dont les coefficients sont opposés à ceux de la série initiale). La somme donne 0 le rayon de convergence est infini alors que le rayon de convergence des séries initiales pouvait même être nul.

Dans le troisième il suffit de considérer le produit de  $1 - z$  (rayon de convergence infini) par  $1 + z + z^2 + \dots$  (rayon de convergence 1) qui vaut 1 pour le montrer.

## 4 Intégration et dérivation des séries entières

Dans toute la suite les séries entières sont supposées être des séries entières en 0, les résultats s'étendent automatiquement aux séries entières en  $a$ .

Etant donnée une série entière de terme général  $a_n z^n$ , on appellera série dérivée la série de terme général  $(n+1)a_{n+1}z^n$ .

On a le théorème suivant

**Théorème 4.1.** *Etant donnée une série entière de terme général  $a_n z^n$  de rayon de convergence  $\rho$  la série dérivée a aussi  $\rho$  pour rayon de convergence.*

*Supposons que la variable est réelle et si  $s(x)$  est la somme de la série initiale ( $|x| < \rho$ ) alors  $s$  est dérivable dans son domaine de définition et  $s'(x)$  est la somme de la série dérivée :*

$$s'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + (n+1)a_{n+1}x^n + \dots$$

pour  $|x| < \rho$ .

En fait la seconde partie du théorème précédent reste vraie si  $z \in \mathbb{C}$ . Mais comme on n'a pas défini la notion de dérivabilité pour les fonctions de variables complexes il faudra être prudent dans l'utilisation de ce résultat dans ce cas. On admettra donc l'extension et on donnera des précisions si nécessaire au cas par cas.

Voici des applications de ce résultat.

- On a

$$1 + 2x + \dots + (n+1)x^n + \dots = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

et plus généralement pour  $k \geq 1$  en dérivant  $k$  fois

$$k! + [(k+1) \dots 2]x + \dots + [(n+k) \dots (n+1)]x^n + \dots = \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(k)} = k! \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$$

soit

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = 1 + (k+1)x + \dots + \binom{n+k}{k} x^n + \dots$$

pour  $|x| < 1$ .

- Considérons la série exponentielle, c'est-à-dire la série dont le terme général vaut  $\frac{x^n}{n!}$ . On constate que la série dérivée est identique. Donc si  $s(x)$  est la somme de cette série (qui est définie pour tout  $x$  et en fait tout  $z$ ) on a  $s(x) = s'(x)$ .

Or on sait que la fonction exponentielle (fonction réciproque du logarithme népérien) est telle que  $\exp(x) = \exp'(x)$ . On en déduit facilement que  $s(x) = \lambda \exp(x)$  avec

$\lambda \in \mathbb{R}$ . Il suffit pour faire cela de montrer que la dérivée de  $s(x) \exp(-x)$  est nulle, ce qui est facile.

On conclut que  $s(x) = \exp(x)$  en observant que  $s(0) = \exp(0) = 1$ . Donc

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Par définition pour tout  $z \in \mathbb{C}$  on peut donc définir  $\exp(z)$  par

$$\exp(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

ce qui a un sens car les deux termes concident si  $x \in \mathbb{R}$ .

- Considérons la série de terme général  $\frac{x^n}{n}$ ,  $n \geq 1$ , son rayon de convergence est 1. La série dérivée est la série de terme général  $x^n$ ,  $n \geq 0$ , de somme  $\frac{1}{1-x}$ . La

Le résultat précédent s'étend automatiquement au cas des primitives :

**Théorème 4.2.** *Etant donnée une série entière de terme général  $a_n z^n$  et de rayon de convergence  $\rho$  la série entière de terme général (si  $n \geq 1$ , le terme  $u_0$  constant est quelconque)  $u_n = \frac{a_{n-1}}{n} z^n$  a aussi  $\rho$  pour rayon de convergence.*

*Supposons que la variable est réelle et soit  $s(x)$  la somme de la série initiale ( $|x| < \rho$ ), et  $S(x)$  la somme de la seconde série. Alors  $S$  est dérivable dans son domaine de définition et  $S'(x) = s(x)$  :*

$$(u_0 + a_0 x + \dots + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \dots)' = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots$$

pour  $|x| < \rho$ .

De plus on a :

$$S(b) - S(a) = \sum_{n \geq 0} a_n \int_a^b t^n dt$$

pourvu que  $-\rho < a \leq b < \rho$ .

La même remarque que plus haut vaut pour les fonctions complexes.

Par exemple la série entière de terme général  $\frac{x^n}{n}$  si  $n \geq 1$  0 sinon est de rayon de convergence 1 et sa somme vaut  $\ln(1-x)$  :

$$\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots$$

si  $|x| < 1$ .

**Corollaire 4.3.** *Etant donnée une série entière de terme général  $a_n x^n$  de rayon de convergence  $\rho$ . Soit  $s(x)$  la somme de la série initiale, alors  $s$  est infiniment dérivable pour  $|x| < \rho$ .*

*Sa dérivée  $k$ -ième est somme de la série entière de rayon de convergence  $\rho$  obtenue en dérivant termes à termes  $k$ -fois la série entière initiale.*

## 5 Développement de fonctions en séries entières

Il est naturel de se demander quand une fonction est développable en série entière, c'est à dire somme d'une série entière, en 0 (ou  $a$ ) de rayon de convergence  $\rho$  non nul. En fait les fonctions que l'on utilise par exemple en physique ont très souvent cette propriété. En fait ce sont des fonctions très particulières, ainsi qu'on l'a vu elles sont infiniment dérivable. Il résulte de la section précédente que :

**Théorème 5.1.** *Etant donnée une fonction  $f$  somme de la série entière de terme général  $a_n z^n$  de rayon de convergence  $\rho$ . On a*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

et

**Proposition 5.2.** *Une fonction développable en série entière en 0 admet des développements limités à n'importe quel ordre en 0.*

Mais ceci n'est pas suffisant pour garantir qu'une fonction  $f$  est développable en série entière.

On a cependant aussi, comme conséquence de la formule de Taylor :

**Théorème 5.3.** *Etant donnée une fonction  $f$  telle qu'il existe une constante  $K \geq 0$  et un réel  $\rho > 0$  tels que  $|f^{(n)}(x)| \leq K$  pour tout  $n$  et tout  $x$  tel que  $x < \rho$ . Alors  $f$  est développable en série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à  $\rho$ .*

On notera aussi le résultat fondamental suivant, lié à cette question :

**Théorème 5.4.** *(Principe des zéros isolés) Si  $f$  est somme d'une série entière de rayon de convergence non nul  $\rho$ . Alors soit  $f$  est nulle dans son rayon de convergence et tous les coefficients de la série sont nuls; soit  $f$  ne s'annule qu'un nombre fini de fois pour des valeurs de  $x$  telles que  $|x| \leq \lambda$ ,  $\lambda < \rho$ .*

## 6 Equations différentielles

Voici un exemple de résolution d'équation différentielle utilisant une un développement en série entière. Soit l'équation

$$y'' + xy' + y = 1$$

On va chercher la solution comme somme d'une série entière :

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

dont on suppose que le rayon de convergence  $\rho$  est strictement positif. Dans le domaine de convergence la dérivée  $y'$  et la dérivée seconde  $y''$  sont données par

$$\sum_{n \geq 0} (n+1)a_{n+1}x^n$$

et

$$\sum_{n \geq 0} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

le développement de  $xy'$  est obtenu en multipliant celui de  $y'$  par  $x$ .

Si une telle solution existe, la fonction  $y'' + xy' + y$  admet donc pour développement en série entière ( $x < \rho$ )

$$\sum_{n \geq 0} ((n+2)(n+1)a_{n+2} + na_n + a_n)x^n$$

cette fonction devant être constante égale à 1 le coefficient d'ordre 0 vaut 1, les autres sont nuls :

- $2a_2 + a_0 = 1$
- $(n+2)a_{n+2} + a_n = 0, n \geq 1$

On en déduit que

- $a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2 \times 4 \times \dots \times 2n} (a_0 - 1)$  et
- $a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{1 \times 3 \times \dots \times 2n+1} a_1, n \geq 1$

On est donc amené à considérer les deux séries entières dont les termes généraux sont décrits ci-dessus

On montre alors que leur rayon de convergence est infini (il ne dépend pas de  $a_0$  et  $a_1$ ), leur somme respective  $u$  et  $v$  sont donc solution de l'équation. Donc toute combinaison linéaire de  $u$  et  $v$  est solution de l'équation.

On admettra que toute solution est de cette forme.

Cherchons maintenant l'unique solution telle que  $g(0) = g'(0) = 0$ . On trouve  $a_0 = 0$  et  $a_1 = -1$ , soit

$$-1 + \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)$$

## 7 Le théorème d'Abel

Le théorème suivant étudie le comportement d'une fonction développable en série entière en 0 de rayon de convergence  $\rho$  quand  $x$  tend vers  $\rho$  par valeurs inférieures. La démonstration est très proche de celle du lemme d'Abel et n'est pas faite ici.

**Théorème 7.1.** *Soit  $f$  une fonction développable en série entière de coefficient  $a_n$ , de rayon de convergence  $\rho > 0$ . Supposons que la série numérique de terme général  $a_n \rho^n$  converge (simplement) vers une somme  $S$ . alors la limite de  $f$  quand  $x$  tend vers  $\rho$  par valeurs inférieures existe et est égale à  $S$ .*

On peut appliquer ce théorème au cas de  $f(x) = \ln(1+x)$ , pour laquelle  $\rho = 1$ . Les coefficients valent  $\frac{(-1)^n}{n}$  si  $n \geq 1$ , 0 sinon. On peut appliquer le théorème car on sait que la série alternée converge. On en déduit que

$$\ln(2) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

On en déduit aussi que

$$\frac{\pi}{4} = \arctg(1)(2) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$