

Coniques et quadriques

1 Coniques

Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension 2, le produit scalaire sera noté comme d'habitude : $\langle u, v \rangle$. On suppose donné le repère orthonormé avec les notations standards, \vec{i}, \vec{j} , axe des x et des y .

Définition 1.1. • On appellera parabole de foyer $F \in E$ et directrice $D \subset E, F \notin D$, l'ensemble des points dont la distance à F est égale à la distance à D .

- On appellera ellipse de foyers $F_1, F_2 \in E$ l'ensemble des points dont la somme des distances à F_1 et à F_2 est égale à d .
- On appellera hyperbole de foyers $F_1, F_2 \in E$ l'ensemble des points dont la valeur absolue de la différence des distances à F_1 et à F_2 est égale à d .

La droite F_1F_2 , ou la perpendiculaire à D passant par F est la droite (ou axe) focale.

Théorème 1.2. Le lieu des points du plan euclidien dont le rapport des distances à $F \in E$ et une droite $D \subset E, F \notin D$ est égal à une constante $e > 0$, est

- une parabole si $e = 1$,
- une ellipse si $e < 1$,
- une hyperbole si $e > 1$.

Le réel e est appelé l'excentricité.

Le cas $e = 0$ doit être traité à part et relève de la définition précédente dans le cas des ellipses, avec $F_1 = F_2$, on obtient les cercles.

Théorème 1.3.

Si on suppose que la directrice est l'axe des x et le foyer le point de coordonnées $(0, a)$ la parabole a pour équation $x^2 = 2ay - a^2$ soit, $y = \frac{x^2 + a^2}{2a}$. Le point $(0, \frac{a}{2})$ est appelé le sommet. La quantité $p = \|a\|$ est appelé le paramètre de la parabole. La parabole est symétrique par rapport à la droite focale.

Application physique : un rayon lumineux émis par le foyer se réfléchit sur la parabole dans la direction de la directrice.

Si on suppose que les foyers sont les points de coordonnées $(\alpha, 0)$ et $(-\alpha, 0)$, et la somme des distances d , elle admet l'origine pour centre de symétrie, l'axe des x et celui des y comme axes de symétrie.

Elle a pour équation

$$\sqrt{(x - \alpha)^2 + y^2} + \sqrt{(x + \alpha)^2 + y^2} = d$$

soit

$$((x - \alpha)^2 + (x + \alpha)^2 + 2y^2 - d^2)^2 = 4(x^2 - \alpha^2)^2 + y^4 + 2y^2(x^2 + \alpha^2)$$

Les termes de degré 3 et 4 en x, y, α disparaissent. Il reste

$$((x - \alpha)^2 + (x + \alpha)^2 + 2y^2 - d^2)^2 = 4(x^2 - \alpha^2)^2 + y^4 + 2y^2(x^2 + \alpha^2)$$

Soit

$$x^2(4d^2 - 16\alpha^2) + y^2 4d^2 = d^2(d^2 - 4\alpha^2)$$

On suppose évidemment $d \geq 2\alpha \geq 0$.

L'équation devient

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

avec $a = \frac{d}{2} \geq b = \sqrt{\frac{d^2 - 4\alpha^2}{4}}$.

So on prend maintenant le lieu des points dont le rapport des distances au point de coordonnées $(u, 0)$ et à l'axe des y vaut $e < 1$ on obtient l'équation

$$(x - u)^2 + y^2 = e^2 x^2$$

soit en posant $x' = x - \frac{u}{1-e^2}$

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

avec $a = \frac{ue}{1-e^2}$ $b = \frac{ue}{\sqrt{1-e^2}}$,

On a donc bien une ellipse.

On notera que

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

Avec la première équation

$$e = \frac{2\alpha}{d}$$

Il convient de noter qu'une ellipse a deux foyers et deux directrices. Sous la forme de l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

les foyers sont les points $(ae, 0)$, $(-ae, 0)$, les directrices associées sont les droites d'équation respective $x = \frac{a}{e}$ et $x = -\frac{a}{e}$.

On notera qu'une ellipse est connexe.

Application à la physique : mouvement des planètes.

Si on suppose que que les foyers sont les points de coordonnées $(\alpha, 0)$ et $(-\alpha, 0)$, et la valeur absolue de la différence des distances d , l'hyperbole admet l'origine pour centre de symétrie, l'axe des x et celui des y comme axes de symétrie.

Elle a pour équation

$$(\sqrt{(x - \alpha)^2 + y^2} - \sqrt{(x + \alpha)^2 + y^2})^2 = d^2$$

soit comme plus haut

$$x^2(4d^2 - 16\alpha^2) + y^2 4d^2 = d^2(d^2 - 4\alpha^2)$$

Mais ici $2\alpha \geq d \geq 0$.

L'équation devient

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

avec $a = \frac{d}{2} \geq b = \sqrt{\frac{4\alpha^2 - d^2}{4}}$.

So on prend maintenant le lieu des points dont le rapport des distances au point de coordonnées $(u, 0)$ et à l'axe des y vaut $e > 1$ on obtient l'équation

$$(x - u)^2 + y^2 = e^2 x^2$$

soit en posant $x' = x - \frac{u}{1-e^2}$

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

avec $a = \frac{ue}{1-e^2}$ $b = \frac{ue}{\sqrt{e^2-1}}$,

On a donc bien une hyperbole.

On notera que

$$e^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2}$$

Il convient de noter qu'une hyperbole a deux foyers et deux directrices. Sous la forme de l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

les foyers sont les points $(ae, 0)$, $(-ae, 0)$, les directrices associées sont les droites d'équation respective $x = \frac{a}{e}$ et $x = -\frac{a}{e}$.

Une hyperbole a deux composantes connexes.

Application à la physique : mouvement de deux particules dont la charge électrique a le même signe.

Les sommets d'une hyperbole ou d'une ellipse sont les intersections de la courbe avec l'axe focal, et pour l'ellipse avec la perpendiculaire à l'axe focal passant par l'origine.

2 Coniques du plan euclidien

On va reprendre d'une autre manière désormais. On appellera conique lieu des points de coordonnées x et y d'un plan euclidien tel qu'un polynôme en x et y du second degré prenne une valeur donnée.

Soit $ax^2 + 2bxy + cx^2 + dx + ey + f$ ce polynôme. On va montrer que le lieu des points est une conique dont on va chercher les caractéristiques.

On commence par chercher à faire disparaître les termes de degré 1 par une translation en posant $x' = -\alpha$, $y' = y - \beta$. Un calcul montre que ceci est possible si le déterminant

$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$ est non nul, autrement dit si le rang de la forme quadratique $ax^2 + 2bxy + cx^2$ est 2.

On se place sous cette hypothèse, on dira que l'on a une conique à centre.

On se ramène donc à chercher le lieu des points tels que $ax^2 + 2bxy + cy^2 = k$, pour une certaine constante k .

Si $k = 0$ le lieu est soit vide soit réunion de deux droites. On supposera dans la suite que $k \neq 0$ et on étudiera donc $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$ en divisant de chaque côté par k . On pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, il s'agit d'une matrice symétrique réelle. On peut donc la diagonaliser dans une base orthonormée. Les deux valeurs propres sont non nulles.

Il y a trois cas :

1. D'abord les deux valeurs propres sont positives, si on note X et Y les coordonnées dans la nouvelle base, et $\lambda \leq \mu$ les valeurs propres, l'équation devient

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = \lambda X^2 + \mu Y^2 = 1$$

On a donc une ellipse, avec $\lambda = \frac{1}{a^2}$ et $\mu = \frac{1}{b^2}$. On fera attention à l'ordre de a et b , λ et μ .

Les axes de symétrie de l'ellipse sont portés par les vecteurs propres, l'axe focal correspond à la plus petite valeur propre.

2. Ensuite les deux valeurs propres sont négatives, l'ensemble est vide.
3. Puis une valeur propre est positive, λ , l'autre est négative $-\mu$. Si on note X et Y les coordonnées dans la nouvelle base, l'équation devient

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = \lambda X^2 - \mu Y^2 = 1$$

On a donc une hyperbole, avec $\lambda = \frac{1}{a^2}$ et $\mu = \frac{1}{b^2}$.

Les axes de symétrie de l'ellipse sont portés par les vecteurs propres, l'axe focal à celui qui rencontre l'hyperbole, l'axe des x .

Il reste à traiter le cas où la forme est dégénérée. On commence d'emblée par diagonaliser $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ sous la forme $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Le changement de variable ramène alors à une équation

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = \lambda X^2 + uX + vY = 1$$

qui se ramène à l'équation d'une parabole par translation.