Valeurs propres, vecteurs propres, diagonalisation

1 Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres

Soenit E un espace vectoriel et φ un endomorphisme de E (c'est à dire une application linéaire de E dans lui même.

Définition 1.1. *Si il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$)et un vecteur non nul $v \in E$ tels que $\varphi(v) = \lambda v$, on dit que λ est une valeur propre de u. Si λ est une valeur propre et un vecteur propre de φ, associé λ est un vecteur v tel que $\varphi(v) = \lambda v$.*

Proposition 1.2. *Soit λ une valeur propre de φ, le sous ensemble des vecteurs propres de φ associé à λ est un sous-espace vectoriel appelé sous-espace propre de φ associé à λ et noté E_λ.*

L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme φ est appelé le spectre de φ et est noté $\mathrm{Spec}(\varphi)$.

- Une homotéthie de rapport λ a λ pour seule valeur propre, le sous-espace propre associé est tout l'espace,
- un projecteur p (différent de l'identité et de l'application nulle) a pour valeurs propres 0 et 1, les sous-espaces propres associés sont le noyau et l'image, en effet si $p(v) = \lambda v$ alors comme $p^2 = p$ on a $\lambda^2 v = \lambda v$, soit $\lambda^2 = \lambda$ comme $v \neq 0$,
- une rotation d'angle diférent de 0 et π du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ n'a pas de valeurs propres,
- un endomorphisme d'un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ f tel que $f^n = \mathrm{Id}$ a pour valeurs propres des racines n-ièmes de 1, en efftet si $f(v) = \lambda v$ on a $f^n(v) = \lambda^n v$, soit $v = \lambda^n v$ et si $v \neq 0$ $\lambda^n = 1$,
- l'endomorphisme de l'espace des fonctions dérivables dans lui même qui à une fonction associe sa dérivée admet tous les réels pour valeur propre, la fonction $x \mapsto e^{ax}$ est vecteur propre associé à la valeur propre a.

2 Détermination des valeurs propres, polynôme caratéristique

Soient E un espace vectoriel et φ un endomorphisme de E et $\lambda \in \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$)

Théorème 2.1. *Le scalaire λ est valeur propre de φ si et seulement si l'endomorphisme $\varphi - \lambda \mathrm{Id}$ n'est pas inversible. Autrement dit si et seulement si $\det(\varphi - \lambda \mathrm{Id}) = 0$.*

On sait que pour calculer ce déterminant on peut choisir une base quelconque de E, dans laquelle φ a pour matrice A, alors la matrice de $\varphi - \lambda \mathrm{Id}$ est $A - \lambda I_n$. Le déterminant cherché est celui de cette matrice. Répètons que le déterminant obtenu sera le même quelle que soit la base choisie. ag.pdf
Par exemple :

- $$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) \end{pmatrix} \qquad c_A(X) = X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$$

- $$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & & & & & 0 \\ & & & & & \\ & & & & & \\ 0 & & & & 0 & 1 \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad c_N(X) = (-1)^n X^n$$

- $$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & & \\ 0 & \lambda_2 & *ag.pdf & * & \\ & & & & \\ & & & & \\ 0 & & 0 & \lambda_{n-1} & * \\ 0 & & & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad c_T(X) = (\lambda_1 - X)(\lambda_2 - X)\dots(\lambda_n - X)$$

En calculant $\det(A - XI_n)$ on obtient un polynôme en X degré n de coefficient dominant $(-1)^n$. Ce polynôme est appelé le polynôme caractéristique de φ ou le polynôme caractéristique de la matrice A. On le notera $c_\varphi(X)$ ou $c_A(X)$. La notation $\chi_\varphi(X)$ (resp. $\chi_A(X)$) est aussi utilisée.
Sa valeur pour $X = 0$ est $\det(A)$. Il s'écrit donc :

$$c_A(X) = (-1)^n X^n + \ldots + \det(A)$$

On vérifie par récurrence que :

Proposition 2.2. *Le coefficient du terme de degré $n-1$ est $(-1)^{n-1}\mathrm{Tr}(A)$.*

Donc

$$c_A(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1}\mathrm{Tr}(A)X^{n-1} + \ldots + \det(A)$$

Le théorème fondamental est le suivant :

Théorème 2.3. *Le scalaire λ est valeur propre de l'endomorphisme φ si et seulement si il est racine du polynôme caractéristique.*

On appellera valeur propre d'une matrice A, (n, n), les racines du polynôme caractéristique $c_A(X)$. Ce sont les valeurs propres de l'endomorphisme dont la matrice est A dans la base standard de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$).
Dans la suite on parlera donc indifféremment des valeurs propres d'un endomorphisme ou de sa matrice dans une base.

Corollaire 2.4. *Un endomorphisme φ d'un espace vectoriel de dimension n ou une matrice A (n, n) a au plus n valeurs propres.*

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ les racines du polynôme caractéristique. Il s'écrit

$$c_\varphi(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{m_1} \ldots (X - \lambda_t)^{m_t} P$$

où P est un polynôme qui n'a pas de racines; m_i est la multiplicité de λ_i. Dans le premier exemple donné plus haut (celui d'une matrice de rotation) c_A n'a pas de racines (sur $\mathbb{R}$)? Si on se place sur les complexes tout polynôme de dgré n a n racines avec les multiplicités.

Proposition 2.5. *Soit λ une valeur propre, et m_λ l'ordre de multiplicité de λ en tant que racine de $c_\varphi(X)$. On a alors :*

$$1 \leq \dim(E_\lambda) \leq m_\lambda$$

La preuve de l'négalité de droite repose sur le résultat suivant :

Lemme 2.6. *Soit $F \subset E$ un sous-espace stable sous φ (voir définition ci dessous), et notons ψ l'endomorphisme de F induit par φ. Alors c_ψ divise c_φ.*

Par définition on dit qu'un sous-espace F de E est stable par φ si $\varphi(F) \subset F$.
Soit $(v_1, \ldots, v_k)$ une base de F, d'après le théorème de la base incomplète on peut trouver des vecteurs $v_{k+1}, \ldots, v_n$ de E tels que $(v_1, \ldots, v_n$ soit une base $\mathcal{B}$ de E.
Soit A la matrice de φ dans $\mathcal{B}$ et B la matrice de la restriction de φ a F dans la base $(v_1, \ldots, v_k)$. On a

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

$$c_\varphi(X) = \det(\begin{pmatrix} B - XI_k & C \\ 0 & D - XI_{n-k} \end{pmatrix}) = c_\psi(X)\det(B - XI_{n-k})$$

On en déduit le résultat comme suit. On complète une base du sosu-espace propre E_λ (qui correspond à F) en une base de E. On observe qu'un sous-espace propre de φ est stable par φ.
Le lemme ci-dessus se traduit dans ce cas en $(\lambda - X)^{\dim E_\lambda}$ divise $c_\varphi(X)$. Car la matrice B est la matrice diagonale $d, d)$ avec $d = \dim E_\lambda$ avec λ sur la diagonale. Ce qui donne le résultat.

3 Diagonalisation

Soit E un espace vectoriel et φ un endomorphisme.

Définition 3.1. *On dit que φ est diagonalisable si il existe une base de E dans laquelle la matrice de φ est diagonale.*

Autrement dit φ est diagonalisable si et seulement si on peut trouver une base de E dans laquelle la matrice de φ est de la forme :

$$\begin{pmatrix}
\lambda_1 & 0 & \ldots & & & & & \\
0 & \lambda_1 & 0 & \ldots & & & & \\
 & & \ldots & \ldots & \ldots & & & \\
 & & 0 & \lambda_1 & 0 & & & \\
 & & & 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & \\
 & & \ldots & & & & & \\
 & & & & \ldots & & & \\
 & & & & & & 0 & \lambda_r
\end{pmatrix}$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ désignent les valeurs propres de φ, ici considérées comme 2 à 2 distinctes, chacune apparait autant de fois que sa multiplicité.
Enfin

Proposition 3.2. *Soit E un espace' vectoriel de dimension n et soit φ un endomorphisme. La dimension du sous-espace propre associé à λ_k de l'endomorphisme φ de E est égale à*

$$n - \operatorname{rang}(\varphi - \lambda_k \mathrm{Id}) = n - \operatorname{rang}(A - \lambda_k I_n)$$

où A est la matrice de φ dans une base quelconque.

C'est une application directe de la définition.
Voici un exemple.
On considère la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

le polynôme caracatéristique est $(1-X)(2-X)^2$ dont les racines sont 2 (double) et 1 (simple). On obtient les vecteurs propres en résolvant les sytèmes :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

le premier est de rang 1 une base de l'espace des solutions (espace propre E_2) est donnée par

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

le second est de rang 2 une base de l'espace des solutions (espace propre E_1) est donnée par

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

qui fournissent donc une base de diagonalisation.

Proposition 3.3. *Les sous-espaces propres d'un endomorphisme φ sont en somme directe.*

Proposition 3.4. *Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si E est somme directe des sous-espaces propres de φ.*
Soit si

$$\dim E = \dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} + \ldots + \dim E_{\lambda_t}$$

En effet si E_i désigne le sous-espace propre associé à λ_i, si E est somme directe des E_i choisissant pour chaque E_i une base $\mathcal{B}_i$ la réunion des $\mathcal{B}_i$ est une base de E dans laquelle la matrice de φ est comme indiquée plus haut.
On en déduit

Théorème 3.5. *Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si*

- *le polynôme caractéristique est scindé (il a n racines tenant compte des multiplicités, avec $n = \dim(E)$)*
- *et si pour tout i $\dim(E_i) = m_{\lambda_i}$*

En particulier

Théorème 3.6. *Un endomorphisme est diagonalisable dès que son polynôme caractéristique est scindé et que toutes les racines sont sumples.*

C'est une condition suffisante, pas nécessaire.
On retiendra aussi

Proposition 3.7. *Soit ϕ un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel de matrice A dans une base donnée. Le produit des valeurs propres de ϕ est égal à $\det(A)$, la somme à $\mathrm{Tr}(A)$.*

Finissons par un résultat utile sur les sous-espaces propres.

Théorème 3.8. *Soient E un espace vectoriel et f et g deux endomorphismes de E tels que $f circ g = g \circ f$. Soit E_μ un sous-espace propre de f et $v \in E_\mu$, alors $g(v) \in E_\mu$.*

4 Polynômes d'endomorphisme, théorème de Cayley Hamilton

Soit $P = a_0 + \ldots + a_n X^n \in \mathbb{R}[X]$ (resp. $\mathbb{C}[X]$), et soient φ un endomorphisme d'un espace vectoriel E et A une matrice (n, n).
On définit alors

- $P(\varphi) = a_0 \mathrm{Id} + a_1 \varphi + \ldots + a_k \varphi^k \in \mathcal{L}(E)$
- $P(A) = a_0 I_n + a_1 A + \ldots + a_k A^k \in M_n(A)$

Proposition 4.1. *Pour tous polynômes p et Q on a :*

- $P(\varphi)Q(\varphi) = Q(\varphi)P(\varphi)$
- $P(A)Q(A) = Q(A)P(A)$

On va considérer dans la suite des polynômes P tels que $P(\varphi) = 0$. Il en existe car.

Théorème 4.2. *(Cayley-Hamilton) Soient φ un endomorphisme d'un espace vectoriel E ou A une matrice (n, n), on a*

- $c_\varphi(\varphi) = 0$
- $c_A(A) = 0$

On ne le démontrera pas ce théorème, à ce niveau il est suffisant de connaitre l'énoncé et des cas particuliers de la démonstration :

- démontrer le théorème pour une matrice $(2, 2)$,
- démontrer le théorème pour une matrice diagonale,

- démontrer le théorème pour la matrice

$$N_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \cdots & & & & & \cdots \\ \cdots & & & & & \cdots \\ 0 & & & & 0 & 1 \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme ou une matrice soit diagonalisable :

Théorème 4.3. *Soit un endomorphisme φ d'un espace E ou une matrice A de valeurs propres (2 à 2 distinctes) $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$. Pour que φ ou A soient diagonalisables il faut et il suffit qu'ils soient annulés par le polynôme $P(X) = (X - \lambda_1)\ldots(X - \lambda_t)$.*

En voici une variante

Proposition 4.4. *Pour qu'un endomorphisme φ d'un espace E ou une matrice soit diagonalisable il faut et il suffit qu'il soit annulé par un polynôme P non nul scindé dont toutes les racines sont simples.*

Dans ce dernier cas les valeurs propres de φ ou A sont des racines de P, mais une racine de P n'est pas forcément une valeur propre.
On ne démontrera pas ce théorème ici, sauf dans des cas particuliers comme exercice.

- Montrer que ce théorème s'applique au cas des projecteurs.
- Démontrer le théorème si $P = (X - \lambda)(X - \mu)$ $(\lambda \neq \mu)$. On écrira que $(\lambda - \mu)\mathrm{Id} = (\varphi - \mu\mathrm{Id}) - (\varphi - \lambda\mathrm{Id}$. On démontrera que $E = \ker(\varphi - \lambda\mathrm{Id}) \oplus \ker(\varphi - \mu\mathrm{Id})$, conclure.
- Démontrer le théorème si $P = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)(X - \lambda_3)$.

5 Matrices réelles

Si on travaille sur des espaces vectoriels complexes le polynôme caractéristique à coefficinets dans $\mathbb{C}$ est toujours scindé donc les théorèmes précédents s'appliquent (en particulier si toutes les racines sont 2 à 2 distinctes il y a diagonalisation.
Si on travaille sur un espace vectoriel réel et si le polynôme est scindé la théorie précédente s'applique aussi.
Cependant il se peut qu'il n'y ait pas de racines réelles mais seulement des racines complexes conjuguées (c'est le cas dans l'exemple donné plus haut). Dans ce cas on peut cependant trouver une base privilégiée dans certains cas. On ne va traiter que le cas des matrices $(2, 2)$.

Théorème 5.1. *Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice réelle dont les valeurs propres sont complexes conjuguées distinctes , soit $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$. Alors il existe une matrice $(2, 2)$ inversible P telle que :*

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \rho\cos(\theta) & \rho\sin(\theta) \\ -\rho\sin(\theta) & \rho\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

pour trouver le changement de base on raisonne comme si la matrice était une matrice complexe auquel cas elle est diagonalisable. On peut donc trouver un vecteur colonne tel que

$$AX = \rho e^{i\theta} X$$

Ecrivons $X = X' + iX"$, X' et $X"$ étant réels (c'est à dire que les composantes des vecteurs sont réelles). On a

$$AX' + iAX" = (\rho\cos(\theta)X' - \rho\sin(\theta)X") + i(\rho\sin(\theta)X' + \rho\cos(\theta)X")$$

soit identifiant partie réelle et partie imaginaire

$$AX' = \rho\cos(\theta)X' - \rho\sin(\theta)X"$$

et

$$AX" = \rho\sin(\theta)X' + \rho\cos(\theta)X"$$

Ce qui donne la base cherchée (X' et $X"$).

6 Application

Une application classique est le calcul des puissances d'une matrice A. Supposons que A soit diagonalisable. C'est-à-dire qu'il existe P et D avec

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & \dots & \\ 0 & \dots & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

et $D = P^{-1}AP$.
On a:

$$D^k = P^{-1}A^kP \quad A^k = PD^kP^{-1}$$

Soit

$$A^k = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & \dots & \\ 0 & \dots & & & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1}$$

Ceci permet de calculer les suites linéaires récurrentes

$$U_k = AU_{k-1} \quad U_k = A^kU_0$$

avec

$$U_k = \begin{pmatrix} u_{1,k} \\ u_{2,k} \\ \dots \\ u_{n,k} \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{pmatrix} u_{1,k} \\ u_{2,k} \\ \dots \\ u_{n,k} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & \dots & \\ 0 & \dots & & & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} u_{1,0} \\ u_{2,0} \\ \dots \\ u_{n,0} \end{pmatrix}$$