Formes bilinéaires, changement de bases. Formes quadratiques, réductions

1 Forme bilinéaire, changement de bases.

Soient E un espace vectoriel de dimension n , φ une forme bilinéaire. On suppose donnée une base B de E dont les éléments (de la base) sont notées e_i. Soient $v, w \in E$, on notera V et W les vecteurs colonnes des coordonnées α_i (resp. β_i) de v et w dans la base B. On note A pour la matrice $(\varphi(e_i, e_j)$. Alors on notera souvent $< x, y >$ pour $\varphi(x, y)$.

$$\varphi(v, w) = {}^tVAW$$

En effet

$$\varphi(v, w) = \varphi(\sum_i \alpha_i e_i, \sum_j \beta_j e_j) = \sum_{i,j} \varphi(e_i, e_j)\alpha_i\beta_j = \sum_{i,j} a_{i,j}\alpha_i\beta_j$$

Définition 1.1. *La forme bilinéaire est dite symétrique si pour tous les $v, w \in E$ on a $\varphi(v, w) = \varphi(w, v)$, antisymétrique si pour tous $v, w \in E$ on a $\varphi(v, w) = -\varphi(w, v)$*

Définition 1.2. *La forme bilinéaire est symétrique si sa matrice (dans une base quelconque) A est symétrique, c'est à dire que $a_{i,j} = a_{j,i}$ pour tout i et tout j. la forme est antisymétrique si sa matrice (dans une base quelconque) A est antisymétrique, c'est à dire que $a_{i,j} = -a_{j,i}$ pour tout i et tout j.*

Dans le cas antisymétrique cela implique en particulier que les termes diagonaux sont nuls. En fait pour tout v on a $\varphi(v, v) = 0$.
L'ensemble des formes bilinéaires sur un espace vectoriel E est un espace vectoriel de dimension n^2. Toute forme bilinéaire peu s'écrire de manière unique comme somme d'une forme symétrique et d'une forme antisymétrique grâce à la formule suivante :

$$\varphi(v, w) = \frac{\varphi(v, w) + \varphi(w, v)}{2} + \frac{\varphi(v, w) - \varphi(w, v)}{2}$$

Le sous-espace vectoriel des formes symétriques est de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$, celui des formes antisymétriques de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$.
Supposons maintenant que l'on passe d'une base B à une base B' de E et que la matrice de changement de base soit P. Soit A , resp.A', la matrice de φ dans B, resp. B'.
Alors

$$A' = {}^tPAP$$

2 Formes quadratiques, réduction de Gauss

Soit E un espace vectoriel et soit φ une forme bilinéaire symétrique sur E.

Définition 2.1. *la forme quadratique Φ associée à φ est l'application de E dans $\mathbb{R}$ donnée par $Pv \mapsto \varphi(v, v)$.*

On remarquera que l'on a la formule :

$$\varphi(v, w) = \frac{\Phi(v + w) - \Phi(v) - \Phi(w)}{2}$$

On dit que φ est la forme polaire de Φ.
On appellera plus généralement forme quadratique sur E toute application Φ telle que l'application $\varphi \colon E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ soit une forme bilinéaire symétrique. Evidemment si B est une base de E et A la matrice associée à φ alors

$$\Phi(v) = {}^tVAV$$

On montre que l'on peut trouver des bases où la matrice de la forme quadratique est diagonale.

Théorème 2.2. *Etant donnée une forme quadratique Φ on peut trouver une base B de E telle que si on note x_i les coordonnées de $x \in E$ dans cette base, alors*

$$\Phi(v) = \sum_{i=1,\dots,r} a_i x_i^2$$

où les a_i sont des réels non nuls. L'entier r, appelé le rang de la forme quadratique est bien déterminé.

La démonstration est donnée dans tous les manuels. On va seulement décrire le procédé pratique. On part d'une base quelconque B, on a donc

$$\Phi(v) = \varphi(v, v) = \sum_{i,j} a_{i,j} x_i x_j = \sum_i a_{i,i} x_i^2 + \sum_{i<j} 2a_{i,j} x_i x_j$$

en tenant compte de la symétrie.
Supposons que $a_{1,1} \neq 0$. On regroupe alors les termes en $x_1 x_i$, $i > 1$ et on complète en un binôme :

$$a_{1,1}(x_1^2 + \frac{1}{a_{1,1}} x_1 (\sum_{i>1} a_{1,i} x_i) + \frac{1}{4a_{1,1}^2} (\sum_{i>1} a_{1,i} x_i)^2) = a_{1,1}(x_1 + \frac{1}{2a_{1,1}} x_1 (\sum_{i>1} a_{1,i} x_i))^2$$

On substitue à x_1 la variable $x'_1 = x_1 + \frac{1}{2a_{1,1}}(\sum_{i>1} a_{1,i} x_i)$, on laisse fixe les autres variables (on fait un changement de base dans E^* en fait) On se ramènedonc à

$$a_{1,1} x_1'^2 - \frac{1}{4a_{1,1}} (\sum_{i>1} a_{1,i} x_i)^2) + \sum_{i>1, j>1} a_{i,j} x_i x_j$$

soit une forme du type

$$\alpha x_1'^2 + q(x_2, \dots, x_n)$$

On peut évidemment itérer.
Cependant il peut aussi se présenter le cas où tous les $a_{i,i}$ sont nuls. Dans ce cas on choisit deux indices telles que $a_{i,j} \neq 0$. Il en existe sauf si la forme est nulle. Disons $i = 1, j = 2$. On commence par faire un changement de variables regroupant tous les termes pour lesquels $a_{1,j} \neq 0$ et $a_{2,j} \neq 0$. Posons :

$$x'_1 = x_1 + \frac{1}{a_{1,2}}(\sum_{i>2} a_{1,i}x_i)$$

$$x'_2 = x_2 + \frac{1}{a_{1,2}}(\sum_{i>2} a_{2,i}x_i)$$

Si on fait le changement de variables qui laisse fixe les autres variables la forme quadratique devient :

$$a_{1,2}x'_1x'_2 - a_{1,2}(\frac{1}{a_{1,2}}(\sum_{i>2} a_{1,i}x_i))(\frac{1}{a_{1,2}}(\sum_{i>2} a_{2,i}x_i)) + \sum_{i>2,j>2} a_{i,j}x_ix_j$$

on obtient une expression du type

$$\alpha x'_1x'_2 + q(x_3, \ldots, , x_n)$$

On pose alors

$$x"_1 = \frac{x'_1 + x'_2}{2} \quad x"_2 = \frac{x'_1 - x'_2}{2}$$

ce changement de variables ramène au cas précédent.

3 Signature, théorème de Sylvester

Théorème 3.1. *Etant donnée une forme quadratique Φ on peut trouver une base B de E telle que si on note x_i les coordonnées de $x \in E$ dans cette base, alors*

$$\Phi(v) = \sum_{i=1,\ldots,p} x_i^2 - \sum_{i=1,\ldots,q} x_{i+p}^2$$

avec $p+q=r$ (r est le rang), (p,q) est appelé la signature de la forme quadratique et est bien déterminée.

La démonstrattion procède comme suit. On suppose donnée deux décompositions (associées à des coordonnées x_i et x'_i) avec des signatures (p,q) et (p',q'), $p+q=p'+q'=r$. On suppose $p>p'$ et on obtient une contradiction. Sur le sous-espace P des vecteurs tels que $x_{p+1} = \cdots = x_n = 0$, à l'exception du vecteur nul, la forme quadratique prend des valeurs strictement positives. Sur le sous-espace P' des vecteurs tels que $x'_{p1} = \cdots = x'_{p'} = 0$, prend des valeurs strictement négatives ou nulles. Mais $\dim(P) = p$, $\dim(P') = n - p'$. La condition $p > p'$ implique que $P \cap P'$ n'est pas réduit au vecteur nul. Il existe donc un vecteur pour lequel la forme quadratique prend une valeur strctement positive et une valeur négative ou nulle. Ce qui est impossible, donc $p = p'$.

4 Formes non dégénérées, formes définies, produit scalaire

Une forme bilinéaire symétrique φ sur un espace E est dite non dégénérée si le seul vecteur $v \in E$ tel que $\varphi(v,w) = 0$ pour tout $w \in E$ est le vecteur nul.

Théorème 4.1. *L'ensemble des vecteurs $v \in E$ tels que $\varphi(v,w) = 0$ pour tout $w \in E$ est un sous-espace vectoriel appelé le noyau de φ. Soit d la dimension du noyau et r le rang de la forme alors*

$$d + r = \dim(E)$$

Une forme bilinéaire symétrique φ sur un espace E est dite non dégénérée si le seul vecteur $v \in E$ tel que $\varphi(v,w) = 0$ pour tout $w \in E$ est le vecteur nul, soit si son noyau est trivial. Une forme bilinéaire symétrique φ sur un espace E est dite définie si le seul vecteur $v \in E$ tel que $\varphi(v,v) = 0$ est le vecteur nul. On dit aussi que la forme quadratique Φ est définie.

Théorème 4.2. *Une forme quadratique Φ définie, prend des valeurs toujours positives ou nulles, ou toujours négatives ou nulles. Selon le cas on dit qu'elle est définie positive ou définie négative.*

On le démontre en calculant $\Phi(tv + (1-t)w$ $v, w \in E$, $t \in [0,1]$. Cette quantité est un polynôme de degré 2 en t dont sait qu'il a au plus une racine (la seule valeur si elle existe de t pour laquelle $tv + (1-t)w = 0$). Donc il garde un signe constant. Donc $\Phi(v)$ et $\Phi(w)$ ont même signe ou sont nuls.

Théorème 4.3. *Une forme définie est non dégénérée.*

Définition 4.4. *Un produit scalaire sur un espace vectoriel E est la donnée d'une forme bilinéaire φ dont la forme quadratique associée Φ est définie positive.*

Le produit scalaire "standard" $< v, w >= x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$ (où les x_i et les y_i sont les coordonnées de v et w) est évidemment le premier exemple.
Si on considère l'espace P_n des polynômes de degré inférieur ou égal à n et que l'on définit

$$< P, Q >= \int_0^1 P(t)Q(t)f(t)dt$$

avec f une fonction continue non nulle, prenant des valeurs positives ou nulles, cela définit un produit scalaire.