

Feuille 6 : Séries entières.

1. RAYON DE CONVERGENCE

Exercice 1. Soient $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectifs R et R' . On suppose qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|a_n| \leq |b_n|$. Montrer que $R \geq R'$.

Exercice 2. Soient $\sum a_n z^n$ une série entière et deux nombres h et k tels que $0 < h < |a_n| < k$ pour tout n . Quel est le rayon de convergence de la série ?

Exercice 3. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R . Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n^2 z^n$?

Exercice 4. Etudier la convergence des séries entières suivantes, sans oublier la convergence sur le bord du disque de convergence :

- 1) $\sum \frac{n+1}{n^2+1} z^n$, 2) $\sum \frac{(n+1)^2}{2^n} z^n$, 3) $\sum \frac{3^n}{n!} z^n$, 4) $\sum \frac{1}{n} z^n$,
5) $\sum \sqrt{n} z^n$, 6) $\sum \frac{1}{n^3} z^n$, 7) $\sum \left(\frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{4n^2-1} \right) z^n$,
8) $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)3^{2n-1}} z^n$, 9) $\sum \frac{1}{n^2 2^n} z^n$, 10) $\sum n z^n$, 11) $\sum n^{(-1)^n} z^n$,
12) $\sum z^{n!}$, 13) $\sum (\sin n)^n z^n$, 14) $\sum (1+in) z^n$, 15) $\sum \frac{\sqrt{n} \ln n}{n^2+1} z^n$.

Exercice 5. Soient $\sum a_n z^n$ une série entière telle que $a_n = n$ si n est impair ou nul et $a_n = (1 + \frac{1}{n})^{n^2}$ si n est pair strictement positif. Quel est le rayon de convergence de la série ?

Exercice 6. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ lorsque :

- 1) $a_n = \frac{n^2}{3^n + n}$, 2) $a_n = \frac{n^n}{n!}$, 3) $a_n = \frac{1}{(1 + \sqrt{n})^n}$, 4) $a_n = \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$,
5) $a_n = n^{1/n} - 1$, 6) $a_n = \frac{ch(n)}{n}$, 7) $a_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$,
8) $a_n = \left(e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)$ 9) $a_n = a^{\sqrt{n}}$ ($a \in \mathbb{R}_+^*$)

2. CALCUL DE SOMMES

Exercice 7. Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme des séries entières réelles suivantes :

$$1) \sum_{n \geq 0} (3n + 1)x^{3n}, \quad 2) \sum_{n \geq 0} \frac{\sin n}{n!} x^n, \quad 3) \sum_{n \geq 0} (2^n + 3^n)x^n, \quad 4) \sum_{n \geq 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!},$$

$$5) \sum_{n \geq 0} \sin n x^n, \quad 6) \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{1 + 2 + \dots + n}, \quad 7) \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n \omega^{2n}}{(2n)! 2^{2n-1}} x^{2n},$$

$$8) \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} x^{2n} \quad 9) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} x^n.$$