
Séries entières (suite)

DÉVELOPPEMENT EN SÉRIES ENTIÈRES

Exercice 1 Développer en série entière les fonctions suivantes et préciser le rayon de convergence :

$$\frac{1}{(1+x^2)(1-x)} \text{ au voisinage de } 0 \qquad \frac{1}{x} \text{ au voisinage de } 2$$

$$\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) \text{ au voisinage de } 0 \qquad e^{x(x-2)} \text{ au voisinage de } 1$$

$$\operatorname{Arctan}\frac{1-x^2}{1+x^2} \text{ au voisinage de } 0 \qquad \ln(1+x-2x^2) \text{ au voisinage de } 0$$

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \text{ au voisinage de } 0 \qquad \frac{e^{-x}}{1+x} \text{ au voisinage de } 0$$

Exercice 2 Soit la fonction réelle f définie sur $] -1, +\infty[$ par $f(0) = 1$ et si $x \neq 0$, alors $f(x) = \frac{1}{x} \ln(1+x)$.

Développer f en série entière au voisinage de 0 ; Déterminer le rayon de convergence de cette série entière. Démontrer qu'elle converge uniformément sur $[0, 1]$.

Démontrer que $\int_0^1 \frac{1}{x} \ln(1+x) dx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Exercice 3 On considère l'équation différentielle $4xy'' + 2y' + y = 0$, où y est une fonction de classe \mathcal{C}^2 de la variable réelle x . On se propose de trouver une solution développable en série entière

$$y(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n, \quad \text{vérifiant } y(0) = 1.$$

1. calculer a_n en fonction de a_{n-1} pour $n \geq 1$. En déduire : $a_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!}$ pour $n \geq 0$.

Quel est le domaine de validité de la solution $y(x)$ ainsi obtenue ?

2. Montrer que

$$y(x) = \begin{cases} \operatorname{ch}(\sqrt{-x}) & \text{pour } x \leq 0 \\ \cos(\sqrt{x}) & \text{pour } x \geq 0 \end{cases}.$$

Exercice 4 On considère l'équation différentielle du second ordre

$$y'' + \omega^2 y = 3\omega^2 \cos^2\left(\frac{\omega x}{4}\right)$$

avec les conditions initiales $y(0) = 4$ et $y'(0) = 0$.

On suppose qu'il existe une solution de cette équation développable en série entière au voisinage

de 0. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ cette solution.

1. Calculer a_0 , a_1 , a_2 et a_3 . Déterminer une relation de récurrence entre les coefficients a_n . En déduire l'expression de a_n .
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière ainsi obtenue et calculer sa somme.
3. Retrouver ce résultat par une intégration directe de l'équation différentielle donnée.
4. Déduire de ce qui précède la somme des séries numériques

$$\sum \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{(2n)!} \left(\frac{1}{2^{2n-1}} + \frac{1}{2} \right) \text{ et } \sum \frac{(-1)^n 2^{2n} \pi^{2n}}{(2n)!}.$$

Exercice 5 Déterminer les solutions développables en série entière autour de l'origine de l'équation différentielle $2xy'' + 2y' + y = 0$.

Exercice 6 Déterminer une équation différentielle du premier ordre admettant pour solution

$f : x \mapsto \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$. En déduire un développement en série entière de f à l'origine.

Quel est le développement en série entière de la fonction $x \mapsto (\arcsin x)^2$ à l'origine ?