Matrices et déterminants

1 Matrices

Définition 1.1. *Une matrice réelle (ou complexe) $M = (m_{i,j})$ (m, n) à m lignes et n colonnes est un tableau à m lignes et n colonnes de réels (ou de complexes). Le coefficient situé sur la colonne i et la ligne j est noté $m_{i,j}$.*
La somme de deux matrices $P = (p_{i,j})$ et $Q = (q_{i,j})$ m lignes et n colonnes est la matrice $(p_{i,j} + q_{i,j})$.
Si λ est un scalaire la matrice λP est la matrice $(\lambda p_{i,j})$
L'ensemble des matrices m lignes et n colonnes à coefficients réels (resp. complexes) est noté $\mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ *(resp.* $\mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{C})$*). Si $m = n$ (on parle de matrices carrées) on note simplement* $\mathrm{Mat}_m(\mathbb{R})$ *(resp.* $\mathrm{Mat}_m(\mathbb{C})$*)*

Proposition 1.2. *L'ensemble* $\mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ *(resp.* $\mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{C})$*) est un espace vectoriel réel (resp. complexe) de dimension mn dont une base est donnée par les matrices $E_{r,s}$, $1 \leq r \leq m$, $1 \leq s \leq n$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui sur ligne r et la colonne s.*

Les matrices suivantes (n, n), dites matrices élémentaires seront importantes dans la suite.

- (matrice unité) I_n dont tous les coefficients sur la diagonale valent 1, tous les autres 0 (la diagonale est l'ensemble des points du tableau de coordonnées (r, r), $r \leq n$
- (matrices de transposition) $S_{r,s} = I_n - E_{r,r} - E_{s,s} + E_{r,s} + E_{s,r}$, avec $r \neq s$,
- (matrices de transvection) $T_{r,s}(\lambda) = I_n + \lambda E_{r,s}$, avec $r \neq s$,
- (matrices de dIlatation) $D_r(\mu) = I_n + (\mu - 1)E_{r,r}$.

Soit

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

tous les les éléments diagonaux sont égaux à 1, tous les autres termes sont nuls celui sauf celui sur la ligne r et la colonne s qui est égal à λ.

$$S_{r,s}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

tous les les éléments diagonaux sont égaux à 1, sauf ceux sur la line r et la colonne r et sur la line s et la colonne $s$égaux à 0. Tous les autres sont égaux à 0 sauf ceux sur la line r et la colonne s et sur la line r et la colonne s égaux à 1.

$$T_{r,s}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & \lambda & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

tous les les éléments diagonaux sont égaux à 1, tous les autres termes sont nuls celui sauf celui sur la ligne r et la colonne s qui est égal à λ.

$$D_r(\mu) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \mu & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

tous les les éléments diagonaux sont égaux à 1 sauf ceux sur la ligne r et la ligne r qui est égal à μ.

2 Produit de matrices

Définition 2.1. *Soient $A = (a_{i,j})$ une matrice (m, n) et $B = (b_{i,j})$ une matrice (n, p). Le produit AB est une matrice (m, p) donnée par*

$$p_{i,j} = \sum_{k=1}^{k=n} a_{i,k} b_{k,j}$$

Pour toute matrice A, on note L_i sa i-ème ligne, et C_j sa j-ème colonne.
Soit A une matrice (n, n), on a $AI_n = I_nA = A$.

Définition 2.2. *Une matrice est inversible si Il existe B $((n, n)$ telle que $AB = BA = I_n$.*

Soit la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

si $ad - bc \neq 0$ son inverse est

$$\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

L'inverse n'existe que si l'hypothèse $ad - bc \neq 0$ est satisfaite.

- La matrice $S_{r,s}A$ est la matrice obtenue à partir de A en échangeant les lignes r et s. La matrice $AS_{r,s}$ est la matrice obtenue à partir de A en échangeant les colonnes r et s.

- La matrice $T_{r,s}(\lambda)A$ est la matrice obtenue à partir de A en remplaçant la ligne r par $L_r + \lambda L_s$. La matrice $AT_{r,s}(\lambda)$ est la matrice obtenue à partir de A en remplaçant la colonne C_r par $C_r + \lambda C_s$.

- La matrice $D_r(\mu)A$ est la matrice obtenue à partir de A en multipliant la ligne r par μ. La matrice $AD_r(\mu)$ est la matrice obtenue à partir de A en multipliant la colonne r par μ.

Les opérations décrites ci-dessus sont appelées opérations élémentaires sur la matrice A.
On notera les formule suivantes :

- $S_{r,s}^2 = S_{r,s}$,
- $E_{r,s}^2 = 0$ si $r \neq s$,
- $E_{r,r}^2 = E_{r,r}$,
- $T_{r,s}(\lambda)T_{r,s}^2(\mu) = T_{r,s}(\lambda + \mu)$.

A titre d'exercice on calculera les puissances de la matrice (k, k)

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \dots & & & & & \dots \\ \dots & & & & & \dots \\ 0 & & & & 0 & 1 \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

on montrera en particulier que $N^{k+1} = 0$. On montrera aussi que N^i, $0 \leq i \leq k$ est égale à

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & & \\ \dots & & & 0 & 1 & 0 & \dots & \\ \dots & & & & & \dots & & \\ \dots & & & & & 0 & 1 & \\ \dots & & & & & & \dots & \\ 0 & \dots & & & & 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

Le terme 1 sur la première ligne est sur la colonne $i + 1$.

3 Définition et calcul du rang d'une matrice

Les matrices $S_{r,s}$, $T_{r,s}(\lambda)$ avec $r \neq s$, et $D_r(\mu)$ avec $\mu \neq 0$ sont inversibles, d'inverses respectifs S_{rs}, $T_{rs}(-\lambda)$ avec $r \neq s$, et $D_r(\mu^{-1})$.
On peut en multipliant à gauche par des matrices élémentaires transformer une matrice A quelconque en une matrice en échelons :

Définition 3.1. *Une matrice en échelon est une matrice telle que :*

- *Si une ligne est nulle les lignes suivantes le sont,*
- *le premier terme non nul d'une ligne est égal à* 1*,*

- *si le premier terme non-nul sur de la ligne i est sur la colonne j le premier terme non-nul (si Il existe) de la ligne $i+1$ est sur sur la colonne $j+1$ ou sur une colonne suivante.*

On procède comme suit pour transformer une matrice A quelconque en une matrice en échelons.

- Si la colonne 1 de la matrice A est nulle on passe à la colonne 2.
- Si la colonne 1 n'est pas nulle quitte à multiplier par une matrice $S_{1,s}$ on peut remplacer A par une matrice A' dont le terme sur la première ligne et la première colonne est non-nul. Quitte à multiplier par une matrice $D_1(a)$ on peut supposer que ce terme est égal à 1.
- Multipliant par des matrices $T_{1,j}(\lambda)$ on peut se ramener à une matrice A" dont tous les coefficients sur la première colonne, sauf celui sur la première ligne et la première colonne qui est égal à 1, sont nuls.
- On itère alors le processus en le réappliquant, dans le premier cas à la matrice obtenue à partir de A en enlevant la première colonne, dans le second à celle obtenue à partir de A" en enlevant la première colonne et la première ligne.
- Les multiplications envisagées ci dessus sont toutes à gauche, onh peut utIliser des multiplications à droite si elles apparaissent plus commode (voir exemple ci-dessous).

Définition 3.2. *Au bout de ce processus on obtient une matrice en échelon.*
Le rang de la matrice initiale A est le nombre de lignes non nulles de cette matrice
Il convient de noter qu'Il n'y a pas une seule façon de ramener une matrice donnée à une matrice en échelon. Mais :

Théorème 3.3. *Quelle que soit la manière choisie on obtiendra à la fin un nombre de lignes non nulles indépendant du processus spécifique et ne dépendant donc que de A.*
De plus quand on multiplie une matrice A par une matrice élémentaire E le rang de la matrice initiale est égal au rang de la matrice produit EA (ou AE si le produit est à droite).

Ceci justifie de définir le rang comme Il a été fait.
A titre d'exemple calculons le rang de la matrice suivante qui dépend d'un paramètre a.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ -4 & 4 & -4 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

d'abord on échange C_1 et C_2 : $C_1 \leftrightarrow C_2$ ce qui à l'avantage de faire apparaître 1 en haut à gauche.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 4 & -4 & -4 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & a-1 \\ 0 & -16 & -8 \\ 0 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

où la seconde opération consiste à soustraire

- la première ligne à la seconde : $L_2 - L_1$,
- 4 fois la première ligne à la troisième : $L_3 - 4L_1$,
- 4 fois la première ligne à la quatrième : $L_4 - 4L_1$,.

Puis

- $C_2 \leftrightarrow C_4$
- $C_2 \leftrightarrow C_3$
- $-L_4$, $-L_3$, $-\frac{1}{8}L_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 1-a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1-a \end{pmatrix}$$

- $C_2 \leftrightarrow C_4$
- $C_2 \leftrightarrow C_3$
- $-L_4$, $-L_3$, $-\frac{1}{8}L_2$

La dernière opération étant $L_3 - 2L_2$.
Enfin on fait $C_3 \leftrightarrow C_4$ et le rang est 3 et ne dépend pas de a.
Ce qui a été dit sur les lignes est vrai pour les colonnes. On peut calculer le rang en effectuant des manipulations sur les colonnes: dans la définition d'une matrice en échelon on remplace ligne par colonne ainsi que dans le processus décrit c-dessus. Le nombre de colonnes non nulles obtenues est alors égal au nombre de lignes non nulles obtenues dans le premier processus.

Un dernier exemple : soit $A = (\cos(i-j))$, de taIlle $n > 2$. On a $\cos(i-j) = \cos i \cos j + \sin i \sin j$. Soit C le vecteur de coordonnées $(\cos i)$ et S le vecteur de coordonnées $(\sin i)$. Ces deux vecteurs sont indépendants car non colinéaires $(\cos 2/\sin 2 \neq \cos 1/\sin 1)$. La colonne j est $\cos j\ C + \sin j\ S$. Ainsi, la matrice A est de rang 2.

4 Calcul de l'inverse d'une matrice carrée inversible

On obtient l'inverse d'une matrice A en la ramenant à I_n en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes ou sur les colonnes, **mais sans mélanger**, et en effectuant les mêmes opérations élémentaires sur la matrice I_n.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3/2 & -5 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3/2 & -5 & -1/2 \\ -1/2 & 2 & 1/2 \\ 1/2 & -1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3/4 & -5/2 & -1/4 \\ -1/2 & 2 & 1/2 \\ 1/2 & -1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

la dernière matrice de droite est $= A^{-1}$.

Explication Effectuer les opérations précédentes revient à multiplier la matrice A à gauche par un certain nombre de matrices élémentaires $Q_1, \ldots, Q_k$. On a alors $Q_1 \ldots Q_k A = I_n$. L'inverse de A est donc $Q_1 \ldots Q_k = Q_1 \ldots Q_n I_k$, qui est exactement la matrice qu'on obtient en effectuant les mêmes opérations sur I_n.
Si on mélange les opérations sur les lignes et les colonnes, on aboutit à une égalité du type $Q_1 \ldots Q_k A P_1 \ldots P_m = I_n$, ce qui ne nous donne pas directement l'inverse de la matrice A.

Voici un exemple de nature différente, laissé en exercice.
Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
Calculer A^2 et montrer que $A^2 = 2I - A$, en déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Voici un autre exemple :
L'inverse de la matrice triangulaire supérieure

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcul par blocs Quand la matrice A est donnée par blocs, on peut parfois calculer son inverse en fonction des blocs de A.
L'inverse de la matrice :

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

sous la forme

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix}$$

Un calcul direct donne $X = A^{-1}$, $Y = -A^{-1}CB^{-1}$ et $Z = B^{-1}$.
Attention dans ce type de calcul à ne pas oublier que les blocs sont des matrices et non pas des nombres. En effet, l'algèbre des matrices est non commutative. On ne peut donc pas calculer les produits dans n'importe quel sens.
On notera

Proposition 4.1. *Si A est inversible, alors son rang coïncide avec sa taille.*

5 Déterminants

On parle de déterminant pour une matrice carrée (n, n). Le déterminant d'une matrice $(1, 1)$ $A = (a)$ est égal à a. Le déterminant d'une matrice $(2, 2)$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

est égal à $ad - bc$.
Le déterminant d'une matrice A sera notée $\det(A)$, ou avec $A = a_{i,j}$ $|A| = |a_{i,j}|$. On suppose que l'on a défini le déterminant pour les matrices $(n-1, n-1)$. Soit $A = (a_{i,j}$ une matrice (n, n). Pour tout i, j tels que $1 \leq i, j \leq$ on note $A_{i,j}$ la matrice $(n-1, n-1)$ obtenue en enlevant à A la i-ième ligne et la j-ième colonne. Alors

Définition 5.1.

$$\det(A) = \sum_{i=1,\ldots,n} a_{i,1}(-1)^{1+i}\det(A_{i,1})$$

On démontre par récurence que :

- Si une colonne quelconque de A est nulle le déterminant est est nul.
- Si $A = (a_{i,j}$ est une matrice dont tous les coefficients en dehors de la diagonale sont nuls alors
$$\mathrm{et}(A) = a_{1,1}a_{2,2}\dots a_{n,n}$$
- Si $A = (a_{i,j}$ est une matrice dont tous les coefficients sous la diagonale sont nuls ($a_{i,j} = 0$ si $i > j$ alors
$$\mathrm{et}(A) = a_{1,1}a_{2,2}\dots a_{n,n}$$
- On appliquera les résultats précédents aux matrices élémentaires (sauf pour le cas des matrices $S_{i,j}$ pour les quelles on montrera directement que le déterminant vaut -1).
- Notant C_i les colonnes d'une matrice A on a (avec des notations évidentes)
$$\det(A) = |C_1, \dots, C_i, \dots, C_n| = |C_1, \dots, C_i + \lambda C_j, \dots, C_n|$$
avec $i \neq j$. C'est-à-dire qu'on ne change pas la avleur du déterminant en ajoutant à une colonne un multiple d'une autre colonne.
- En particulier si deux colonnes sont égales le déterminant est nul.

  Calcul par blocs Quand la matrice A est donnée par blocs, on peut parfois calculer son inverse en fonction des blocs de A.

  Le déterminant de la matrice :
$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$
  est égal à
$$\det(A)\det(B)$$

Le corollaire suivant est fondamental :

Corollaire 5.2. *Soit A une matrice*
$$|C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n| = -|C_1, \dots, C_j, \dots, C_i, \dots, C_n|$$
autrement dit en échangeant deux colonnes on change le signe du déterminant.

On peut développer par rapport à n'importe quelle colonne

Corollaire 5.3. *Soit A une matrice et j fixé*
$$\det(A) = \sum_{i=1,\dots,n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\det(A_{i,j})$$

Le théorème suivant se démontre de manière différente. La transpoée d'une matrice A est maamtrice obtenue en échangeant lignes et colonnes, soit en faisant une symétrie autour de la diagonale. Si $A = (a_{i,j})$ la transposée $B = (b_{i,j})$ est donnée par la formule $b_{i,j} = a_{j,i}$

Théorème 5.4. *Soit A une matrice et B sa transposée, alors*
$$\det(A) = \det(B)$$

Il en résulte que tous lénoncés formulés ci-dessus avec les colonnes d'une matrice demeurent vrais si on remplace colonne par ligne.
Enfin on a

Proposition 5.5. *Soient A et B deux matrices carrées (n, n). On a*
$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

6 Déterminants et matrices inversibles, rang

Théorème 6.1. *Une matrice carrée A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.*

L'ensemble des matrices carrées (n, n) à coefficients dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) est noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$).
En fait Il y a une formule pour la matrice inverse, en utIlisant les notations untIlisées plus haut on a :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}((-1)^{i+j}\det(A_{j,i}))$$

On a aussi

Théorème 6.2. *Une matrice A (non nécessairement carrée). Son rang est égal à la dimension du plus grand mineur non nul.*

Si A est une matrice (m, n) un mineur de dinension d est un déterminant (d, d) obtenu à partir de A en éliminant $m - d$ lignes et $n - d$ colonnes.

7 Matrices de changement de bases

Etant donnés un espace vectoriel et deux bases $\mathcal{B}_0 = (v_1, \ldots, v_n)$ et $\mathcal{B}_1 = (w_1, \ldots, w_n)$. On écrit la décomposition des vecteurs de $\mathcal{B}_1$ sur la base $\mathcal{B}_0$:

$$w_j = \sum_{i=1}^{i=n} p_{i,j} v_i$$

Définition 7.1. *La matrice de passage P de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}_1$ est la matrice carrée (n, n) dont le coefficient sur la la ligne i et la colonne j est $p_{i,j}$: $P = (p_{i,j})$.*
Autrement dit le coefficient sur la la ligne i et la colonne j de P est le coefficient de w_j associé à v_i.

Proposition 7.2. *Si on a trois bases $\mathcal{B}_0$, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ et si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}_1$, et Q celle $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$, R celle de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}_2$, on a*

$$R = PQ$$

En particulier Il en résulte qu'une matrice de changement de base est inversible.

Proposition 7.3. *(Calcul des coefficients d'un vecteur dans une nouvelle base) Etant donnés un espace vectoriel E et deux bases $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}_1$. Soit $x \in E$ et soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ les coefficients (coordonnées) de x dans la première base, c'est à dire que $x = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$. On note X le vecteur colonne (matrice n lignes 1 colonne)*

$$X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Et soit X' le vecteur colonne correspondant pour la seconde base.
On a

$$X = PX'$$

8 Matrice d'une application linéaire

Soient deux espaces vectoriels E et F de bases respectives $\mathcal{B}_0 = (v_1, \ldots, v_m)$ et $\mathcal{B}_1 = (w_1, \ldots, w_n)$. Soit de plus une application linéaire $\phi : E \longrightarrow F$. On écrit la décomposition des vecteurs de $\phi(v_j)$ sur la base $\mathcal{B}_1$:

$$\phi(v_j) = \sum_{i=1}^{i=n} a_{i,j} w_i$$

Définition 8.1. *La matrice de ϕ dans les bases $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}_1$ est la matrice (m, n) dont le coefficient sur la la ligne i et la colonne j est $a_{i,j}$: $A = (a_{i,j})$.*
Autrement dit le coefficient sur la la ligne i et la colonne j de P est le coefficient de $\phi(v_j)$ associé à w_i.

On rappelle le changement de base maintenant :

Proposition 8.2. *Soient un espaces= vectoriel E deux bases $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}_1$. Soit de plus une application linéaire $\phi : E \longrightarrow E$. Soit P la matrice de changement de base (voir section précédente) et A la matrice de ϕ dans $\mathcal{B}_0$. La matrice A' de ϕ dans $\mathcal{B}_1$ est donnée par*

$$A' = P^{-1} A P$$

On remarque que (Proposition 5.5) que $\det(A') = \det(A)$. On en déduit que

Proposition 8.3. *Le déterminant de la matrice d'une application linéaire ne dépend pas de la base choisie. On l'appelle le déterminant de l'application linéaire.*

9 Trace d'une matrice

Soit A une matrice carrée (n, n).

Définition 9.1. *On appelle trace de de A et on note $\mathrm{Tr}(A)$ la somme de ses éléments diagonaux :*

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1,\ldots,n} a_{i,i}$$

On a les propriétés suivantes

- Soient A et B deux matrices carrées (n, n) alors

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$$

- Soient A et P deux matrices carrées (n, n), avec P inversible alors

$$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(P^{-1} A P)$$

Il résulte de la propriété précédente que la trace de la matrice d'une application linéaire ne dépend pas de la base choisie. On l'appelle la trace de l'application linéaire.