

Feuille n°1

1.1 — Déterminer λ et μ de manière que les trois vecteurs

$$a_1 = (1, 2, \lambda, 1), \quad a_2 = (\lambda, 1, 2, 3), \quad a_3 = (0, 1, \mu, 0)$$

soient dépendants.

1.2 — Montrer que si $\{a_1, a_2, a_3\}$ est un système libre, il en est de même de $\{a_2 + a_3, a_3 + a_1, a_1 + a_2\}$.

1.3 — Étant donnés trois vecteurs x_1, x_2, x_3 , quelle est la condition pour que le sous-espace engendré par $\{x_1, x_2\}$ soit le même que celui engendré par $\{x_1, x_3\}$.

1.4 — Soit $V = P_4[X]$ l'espace des polynômes réels de degré ≤ 4 . Vérifier que V est un espace vectoriel. Quelle est sa dimension? Donner une base de V .

Soient $A = \{P \in V \mid P(1) = 0\}$ et $B = \{P \in V \mid (X^2 + 1) \mid P\}$. Vérifier que A et B sont bien des sous-espaces vectoriels de V . Donner des bases de A , B , $A \cap B$ et $A + B$.

1.5 — Quel est le rang d'un système lié de n vecteurs tel que tout sous-ensemble propre de ce système soit libre.

1.6 — Si L , M et N sont trois sous-espaces vectoriels de E , a-t'on : $L \cap (M + N) = L \cap M + L \cap N$?

1.7 — Soit E un espace vectoriel de dimension n et φ une application linéaire de E dans lui-même telle que $\varphi^n = 0$ et $\varphi^{n-1} \neq 0$. Montrer que la famille $\{x, \varphi(x), \varphi^2(x), \dots, \varphi^{n-1}(x)\}$ est une base de E .

1.8 — Soient E un espace vectoriel réel de dimension n et u, v et w des applications linéaires de E dans lui-même vérifiant :

a) $v \circ w = w \circ v$

b) $\text{rg } w = \text{rg } (v \circ w)$

c) $u \circ v \circ w = 0$

De l'hypothèse a) déduire une inclusion entre $\text{Im } w$ et $\text{Im } v \circ w$.

Montrer que sous les trois hypothèses on a $u \circ w = 0$

1.9 — Soient E un espace vectoriel réel de dimension n et u une application linéaire de E dans lui-même.

1) Montrer que $M = \{x \in E \mid u(x) = x\}$ est un sous-espace vectoriel de E .

2) Préciser l'intersection de M et du noyau N de u .

3) On suppose u idempotente (i. e. $u \circ u = u$). Montrer que $E = M \oplus N$.

1.10 — Soient E un espace vectoriel réel de dimension n et u et v des applications linéaires de E dans lui-même.

u est dite involutive si $u^2 = I$. On dit que u est un projecteur si $u^2 = u$.

Montrer que si u est un projecteur alors $v = 2u - I$ est involutive

Montrer que si v est involutive il existe un projecteur u tel que $v = 2u - I$.

1.11 — Soient E un espace vectoriel réel de dimension n et u, v et w des applications linéaires de E dans lui-même vérifiant :

a) $v \circ w = w \circ v$

b) $\text{rg } w = \text{rg } (v \circ w)$

c) $u \circ v \circ w = 0$

De l'hypothèse a) déduire une inclusion entre $\text{Im } w$ et $\text{Im } v \circ w$.

Montrer que sous les trois hypothèses on a $u \circ w = 0$

1.12 — Calculer les déterminants de :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1.13 — Calculer de plusieurs façons les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

1.14 — Montrer que les déterminants ci-dessous sont nuls :

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 12 & 8 & 13 \\ 15 & 6 & 10 & 3 \\ 14 & 7 & 11 & 2 \\ 4 & 9 & 5 & 16 \end{vmatrix}$$

1.15 — Les nombres 546, 273 et 169 étant divisibles par 13, montrer, sans le calculer, que le déterminant suivant est divisible par 13 :

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

1.16 — Montrer que le déterminant suivant est nul :

$$\begin{vmatrix} 1 & 12 & 8 & 13 \\ 15 & 6 & 10 & 3 \\ 14 & 7 & 11 & 2 \\ 4 & 9 & 5 & 16 \end{vmatrix}$$

1.17 — Calculer comme produit de facteurs le polynôme :

$$P(x) = \begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+17 \end{vmatrix}$$