Institut Galilée
Licence de Mathématiques
2$^{\text{ème}}$ année
2009-2010

Feuille n^{o}2

2.1 — Montrer qu'une forme linéaire non identiquement nulle est surjective.

2.2 — Soient E et F deux espaces vectoriels sur K.Montrer que $u \in \mathcal{L}(E,F) - \{0\}$ est de rang r si, et seulement si, il existe des formes linéaires $\varphi_1, \cdots, \varphi_r$ linéairement indépendantes dans E^* et des vecteurs $y_1, \cdots, y_r$ linéairement indépendants dans F tels que :

$$\forall x \in E, u(x) = \sum_{i=1}^{r} \varphi_i(x) y_i$$

Montrer que dans ce cas, on a :

$$\ker u = \bigcap_{i=1}^{r} \ker \varphi_i$$

2.3 — Vérifier que la base duale de la base canonique de $K_n[X]$ est définie par :

$$e_j^*(P) = a_j \quad (0 \leq j \leq n)$$

où $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$

2.4 — Soient $x_0, x_1, \cdots, x_n$ $n+1$ éléments de K deux à deux distincts. Montrer que la famille $\mathcal{L} = (L_i)_{0 \leq i \leq n}$ de polynômes définis par :

$$L_i(X) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$$

est une base de $K_n[X]$.
Montrer que la base duale de $\mathcal{L}$ est définie par $L_i^*(P) = P(x_i)$

2.5 — On désigne par $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base canonique de K^n et par $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ celle de $\mathcal{M}_n(K)$.

1) Montrer que pour $i \neq j$, on a :

a) $E_{i,j}E_{j,i} = E_{i,i}$ *b*) $E_{i,j}E_{j,j} = E_{i,j}$ *c*) $E_{j,j}E_{i,j} = 0$

2) Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(K)$ telle que $\varphi(AB) = \varphi(BA)$ pour toutes matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(K)$.

a) Montrer que $\varphi(E_{i,i}) = \varphi(E_{j,j}$ pour tous i, j compris entre 1 et n. On note λ cette valeur commune.

$b)$ Montrer que $\varphi(E_{i,j}) = 0$ pour tous $i \neq j$.
$c)$ Montrer que $\varphi(A) = \lambda Tr(A)$

3) Soit u un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(K)$ tel que $u(I_n) = I_n$ et $u(AB) = u(BA)$ pour toutes matrices A et$B$ dans $\mathcal{M}_n(K)$. Montrer que u conserve la trace.

2.6 — Montrer que deux formes linéaires définissent le même hyperplan si, et seulement si, elles sont proportionnelles.

2.7 — Soient $\varphi, \psi \in E^*$ telles que $\ker \varphi \subset \ker \psi$.

1) Montrer que φ et ψ sont proportionnelles.
2) Montrer que, si $\psi \neq 0$, $\ker \varphi = \ker \psi$.

L'orthogonal d'une partie non vide X de E est l'ensemble $X^\perp = \{\varphi \in E^* | \forall x \in X, \varphi(x) = 0\}$
L'orthogonal d'une partie non vide Y de E^* est l'ensemble $Y^\perp = \{x \in E \mid \forall \varphi \in Y, \varphi(x) = 0\}$

2.8 — Soient A, B des parties non vides de E et U, V des parties non vides de E^*. Montrer que :

1) Si $A \subset B$, alors $B^\perp \subset A^\perp$.
2) Si $U \subset V$, alors $V^\perp \subset U^\perp$.
3) $A^\perp = (Vect(A))^\perp$.
4) $U^\perp = (Vect(U))^\perp$.
5) $\{0\}^\perp = E^*$, $E^\perp = \{0\}$, $\{0\}^\perp = E$ et $(E^*)^\perp = \{0\}$.

2.9 — Montrer que si H est un sous-espace vectoriel de E, on a alors $H = \{0\}$ si, et seulement si, $H^\perp = E^*$.

2.10 — Montrer que :

1) Pour tout sous-espace vectoriel F de E, on a :

$$\dim F + \dim F^\perp = \dim E$$

2) Pour tout sous-espace vectoriel G de E^*, on a :

$$\dim G + \dim G^\perp = \dim E$$

3) Pour tout sous-espace vectoriel F de E et tout sous-espace vectoriel G de E^*, on a :

$$F = \left(F^\perp\right)^\perp \text{ et } G = \left(G^\perp\right)^\perp$$

4) Pour toute partie X de E, on a :

$$\left(X^\perp\right)^\perp = Vect(X)$$

5) Pour tous sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 de E, on a :

$$(F_1 + F_2) = F_1^\perp \cap F_2^\perp \text{ et } (F_1 \cap F_2) = F_1^\perp + F_2^\perp$$

6) Pour tous sous-espaces vectoriels G_1 et G_2 de E^*, on a :

$$(G_1 + G_2) = G_1^\perp \cap G_2^\perp \text{ et } (G_1 \cap G_2) = G_1^\perp + G_2^\perp$$