Institut Galilée
Licence de Mathématiques
2ème année
2009-2010

<u>Feuille n^{o}3</u>

3.1 — Soit φ la forme bilinéaire de $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_2y_2$$

1) Trouver la matrice A de φ dans la base $\mathcal{B} = \{(1, 0), (1, 1)\}$
2) Trouver la matrice B de φ dans la base $\mathcal{B}' = \{(2, 1), (1, -1)\}$
3) Trouver la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la $\mathcal{B}'$ et vérifier que $B = {}^tPAP$

3.2 — Les fonctions suivantes $E \times E \to \mathbb{R}$ sont-elles des formes bilinéaires sur l'espace de dimension finie E ? Si oui, écrire leur matrice dans la base canonique. Sont-elles symétriques ? Lorsque $E = \mathbb{R}^3$, donner leurs matrices dans la base : $(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)$.

1) $\varphi(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ $\quad E = \mathbb{R}^3$.
2) $\varphi(x, y) = x_1y_1 + y_1y_2$ $\quad E = \mathbb{R}^2$.
3) $\varphi(x, y) = x_2y_1 + 3x_2y_2$ $\quad E = \mathbb{R}^3$.
4) $\varphi(x, y) = x_1y_2 - 2x_3(y_2 + 2y_1) + 4x_3y_2 - x_2y_1$ $\quad E = \mathbb{R}^3$.
5) $\varphi(P, Q) = \displaystyle\int_0^1 P(x)Q(x)dx$ $\quad E = \mathbb{R}_3[X]$.

3.3 — $E = K_2[X]$ est l'espace des polynômes de degré ≤ 2. a et b sont des éléments de K. On pose

$$\varphi(P, Q) = \frac{1}{2}(P(a)Q(b) + P(b)Q(a))$$

1) Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique.
2) Donner sa matrice dans la base canonique. Quel est son rang ?
3) Soit $\mathcal{B}$ la base des polynômes d'interpolation de $0, 1, 3$. Donner la matrice de φ dans cette base.
4) Vérifier la formule de changement de base.

3.4 — Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$q(x, y, z) = 2x^2 - y^2 + 2xy - 2xz + 6yz$$

1) Définie la forme polaire φ de q et écrire la matrice A de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2) Déterminer le noyau de φ et préciser si φ est dégénérée.
3) Décomposer q en une combinaison linéaire de carrés indépendants.

3.5 — Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^4$ par :

$$q(x, y, z, t) = xz + xt + yz + yt$$

1) Décomposer q en une combinaison linéaire de carrés indépendants.
2) En déduire les vecteurs isotropes de q.

3.6 — Pour les formes quadratiques suivantes, déterminer une décomposition de Gauss et en déduire noyau, rang, signature :

1) $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 4xz - 6yz$
2) $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto xy + xz$
3) $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} : (x, y, z, t) \mapsto x^2 + y^2 + 2xy + 2xz + 2xt + 2yz + 2yt + 4zt$

3.7 — Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par $q(x, y, z) = x^2 + 3y^2 - 4xy + 2xz + 2yz$. Trouver tous les plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sur lesquels la restriction de q est définie positive.

3.8 — Soit ϕ la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^2$ de matrice : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Déterminer le rang, le noyau, les vecteurs isotropes, la signature . . .

3.9 — E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $\varphi : E \times E \to \mathbb{C}$ une forme bilinéaire symétrique telle que pour tout $x \in E$, $\varphi(x, x) \geq 0$. Montrer que φ est nulle.

3.10 — Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique sur E. On dit qu'un vecteur u de E est isotrope si il est orthogonal à lui-même. Montrer que le noyau de ϕ est constitué de vecteurs isotropes. La réciproque est-elle vraie ?

3.11 — Soit E un K-espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire symétrique φ. Soient x et y deux vecteurs isotropes. Montrer que $x + y$ est isotrope si, et seulement si, x et y sont orthogonaux.

3.12 — Soit E un K-espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire symétrique φ. Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que $F \cap F^\perp \neq \{0\}$. Montrer

$$F^\perp \cap F^{\perp\perp} \neq \{0\}$$

3.13 — Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est dit anisotrope s'il ne contient aucun vecteur isotrope non nul. Montre qu'un espace réel est anisotrope si, et seulement si, la forme est définie positive ou définie négative.
Donner un exemple d'un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ muni d'un produit scalaire indéfini mais qui est anisotrope.

3.14 — Un espace de dimension 2 sur un corps de caractéristique $\neq 2$, muni d'une forme bilinéaire symétrique régulière, qui contient un vecteur isotrope non nul s'appelle un plan hyperbolique.
Montrer que tout plan hyperbolique possède une base $\{u, v\}$ telle que $< u, u >=< v, v >= 0$ et $< u, v >= 1$. Montrer que tout espace de dimension 2 possédant une telle base est un plan hyperbolique.

3.15 — Montrer qu'un espace muni d'une forme bilinéaire symétrique régulière peut s'écrire comme somme directe orthogonale de plans hyperboliques et d'un espace anisotrope.