**Institut Galilée**
**Licence de Mathématiques**
**2$^{\text{ème}}$ année**
**2009-2010**

# Feuille n$^o$5

Dans toute la feuille, $E$ est un espace euclidien de dimension $n$.
Une application $u \in \mathcal{L}(E)$ est orthogonale (ou une isométrie) si : $\forall x \forall y \;\; u(x).u(y) = x.y$

**5.1** — Montrer que $u : E \to E$ est orthogonale si, et seulement si, sa matrice $M$ vérifie ${}^tM.M = I$.

**5.2** — Soient $x$ et $y$ deux vecteurs de $E$. Montrer que $x$ et $y$ ont même longueur si, et seulement si, $x + y$ et $x - y$ sont orthogonaux.

**5.3** — Soit $F$ un sous-espace de $E$. Soit $x \in E$.
1) Montrer qu'il existe un couple unique $(y, z)$ de vecteurs tel que :

$$\begin{cases} x = y + z \\ y \in F \\ z \perp F \end{cases}$$

On dit que $y$ est la projection orthogonale de $x$ sur $F$, notée $p_F(x)$
2) Montrer que $p_F$ est une application linéaire. Montrer que $p_F \circ p_F = p_F$. $p_F$ est-elle une application orthogonale ?
3) Soit $E = \mathbb{R}^2$ et $F$ la droite d'équation $y = x$. Déterminer la matrice de $p_F$ dans la base canonique.
4) Même question avec $E = \mathbb{R}^3$ et $F$ le plan $z = 0$.
5) Même question avec $E = \mathbb{R}^3$ et $F$ le plan $x + y + z = 0$.
6) Soit $E = \mathbb{R}^2$ et $F$ la droite d'équation $y = x$. Déterminer la matrice de $p_F$ dans la base canonique.
7) Même question avec $E = \mathbb{R}^3$ et $F$ le plan $z = 0$.
8) Même question avec $E = \mathbb{R}^3$ et $F$ la droite $\{x = y, y = z\}$.

**5.4** — Soit $F$ un sous-espace de $E$. Soit $x \in E$. $x = p_F(x) + y$ avec $y \perp p_F(x)$. On pose $s_F(x) = p_F(x) - 2y$.
1) Montrer que $s_F$ est une application linéaire. $s_F$ est-elle une application orthogonale ?
2) Soit $E = \mathbb{R}^2$ et $F$ la droite d'équation $y = x$. Déterminer la matrice de $s_F$ dans la base canonique.
3) Même question avec $E = \mathbb{R}^3$ et $F$ le plan $z = 0$.
4) Même question avec $E = \mathbb{R}^3$ et $F$ le plan $x + y + z = 0$.
5) Même question avec $E = \mathbb{R}^3$ et $F$ la droite $\{x = y, y = z\}$.

**5.5** — $E = \mathbb{R}^3$. Déterminer la valeur absolue de l'angle entre $x = (2, 1, 1)$ et chacun des vecteurs de la base canonique. Déterminer la valeur absolue de l'angle entre $x = (2, 1, 1)$ et $y = (2, -1, -1)$.

**5.6 —** $A = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$.

1) Montrer que $A$ est orthogonale. Quel est sont déterminant ?
2) Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de $A$.
3) Quelle est la nature géométrique de $A$ ?

**5.7 —** Soit $A = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$.

1) Montrer que $A$ est la matrice d'une rotation.
2) Déterminer l'angle de la rotation.

**5.8 —** Soit $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Montrer que $A$ est la matrice d'une rotation.
2) Déterminer l'axe et l'angle de rotation.

**5.9 —** Mêmes questions pour :

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & -2\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 & -2 \\ -2\sqrt{3} & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

**5.10 —** Étudier :

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 & 2 \\ 2\sqrt{3} & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \frac{1}{16}\begin{pmatrix} -11 & 3\sqrt{3} & -6\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & 15 & 2 \\ -6\sqrt{3} & 2 & 12 \end{pmatrix}$$