

TD 1

Exercices de révision

1. Calculer par récurrence sur l'entier n les sommes :

$$\sum_{i=0}^n i = 1 + 2 + \dots + n$$

$$\sum_{i=0}^n i^2 = 1 + 2^2 + \dots + n^2$$

$$\sum_{i=0}^n i^3 = 1 + 2^3 + \dots + n^3$$

2. Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles :

$$\frac{X^2 + X + 1}{(X^2 - 1)(X - 2)}$$

$$\frac{X^5 + 1}{(X^2 + 1)(X - 2)}$$

Dans ce dernier cas on fera une décomposition sur les réels et sur les complexes.

$$\frac{X^3 + 1}{(X^2 - 1)(X - 2)^2}$$

$$\frac{X^2 + 1}{X^3 + 1}$$

Dans ce dernier cas on fera une décomposition sur les complexes.

$$\frac{X^2 + 1}{(X^2 - 1)(X - 2)^4}$$

3. Calculer les racines quatrièmes de i en déduire $\cos(\pi/8)$.

4. Soit z un nombre complexe de module 1 tel que $z \notin \mathbf{R}$ et soit a un nombre complexe. Montrer que $|a - z| = |1 - az|$ si et seulement si a est réel.

5. Calculer le développement limité de $\text{Arcsin}\left(\frac{x^2}{1+x}\right)$ à l'ordre 8 en 0.

6. Calculer la limite de la suite de nombres complexes $\frac{1+ina}{|1+ni|}$ a est réel.

7. Calculer la limite de la suite $\cos\left(\frac{2^n}{n!}\right)$

8. Etudier la suite récurrente $u_n = \frac{1}{1+2u_{n-1}}$ en fonction de u_0 .

9. Etudier la suite récurrente $u_n = -\frac{1}{1+2u_{n-1}}$ en fonction de u_0 (sur les réels ou les complexes). 10. Résoudre l'équation différentielle $y' = ay$. 11. Résoudre l'équation différentielle $y' = ay + \sin(x)$, en commençant par le cas sans second membre (expliquer la variation de la constante).