Intégrales impropres

Exercice 1 Donner la nature des intégrales suivantes :

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx.$$

$$\int_1^{\infty} x^x dx.$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}\sin(\frac{1}{x})}{\ln(1+x)} dx.$$

Nature et calcul des intégrales suivantes :

$$\int_1^{2} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx.$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^5}{x^{12}+1} dx.$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}} dx.$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\mathrm{sh}(x)} d(x).$$

Exercice 2 1. Soit f une application continue par morceaux de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}$ possédant une limite ℓ en $+\infty$, telle que $\int_0^{\infty} f$ existe ; montrer que $\ell = 0$.

2. Donner un exemple d'une fonction continue positive telle que :

$$\int_0^{\infty} f(u) du$$

existe mais telle qu'on n'ait pas :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Exercice 3 1. Montrer que $\forall x > -1 \;\ln(1+x) \leqslant x$.

2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que $\forall x \in [0,n] \; (1-\frac{x}{n})^n \leqslant e^{-x} \leqslant (1+\frac{x}{n})^{-n}$.

3. En déduire que

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n} dt.$$

Rappel (intégrales de Wallis) : $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^n \, d\theta \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

4. Montrer que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(1+u^2)^n} du$ existe et vaut I_{2n-2}.

5. Montrer que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ existe et vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 4 Étudier la fonction :

$$h : x \to \int_x^{x^2} \frac{dt}{\log t}.$$

Domaine de définition, continuité et dérivabilité, variations, limites aux bornes de ce domaine, et $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{h(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{h(x)}{x}$, éventuellement convexité.

Exercice 5 Étudier la nature de

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$$

selon $\alpha \in \mathbf{R}$.

Exercice 6 Étude de :

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$
$$x \mapsto \int_1^x \frac{e^t}{t} dt.$$

Donner un équivalent de f en 0 et en $+\infty$.

Exercice 7 Soit f une application continue de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}$ et F de $\mathbf{R}^{+*}$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}^{+*}, F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt.$$

1. Montrer que si f admet une limite ℓ en $+\infty$, alors F a aussi la limite ℓ en $+\infty$.
2. Donner un exemple où f n'a pas de limite en $+\infty$ mais où F tend vers 0.
3. Montrer que si $f \to \infty$ quand $x \to \infty$, alors $F \to \infty$ quand $x \to \infty$.

Exercice 8 Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une application continue qui admette respectivement les limites l_- et l_+ en $-\infty$ et $+\infty$.
Montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(x) - f(x+1))dx$$

converge et déterminer sa valeur.