

L3 Mathématiques

Groupes à 8 éléments

1.0. Soit G un groupe abélien et H un sous-groupe de G . On note K pour le quotient G/H et $p : G \rightarrow K$ l'homomorphisme quotient. On suppose qu'il existe un homomorphisme s de K dans G tel que $p \circ s = \text{Id}_K$. Montrer que G est isomorphe à $H \times K$.
 G désigne dorénavant dans toute cette feuille un groupe à 8 éléments.

On suppose G abélien dans la partie 1.

1.1. Soit G un groupe dont tous les éléments sont d'ordre 2. Montrer que G est abélien.

1.2. On suppose G fini. Montrer par récurrence sur le cardinal que G est isomorphe à $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^n$. On choisira un élément d'ordre 2, soit $x \in G$. Puis on considérera le quotient $G/\langle x \rangle$ auquel on appliquera l'hypothèse de récurrence. Donc $G/\langle x \rangle \cong (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{n-1}$. Soit a_1, \dots, a_{n-1} des générateurs de $G/\langle x \rangle$, on en choisira des images inverses par $p : G \rightarrow G/\langle x \rangle$ et on conclura.

En particulier si G est d'ordre 8 et si tous ses éléments sont d'ordre 2 il est isomorphe à $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^3$.

1.3. Démontrer que si G a un élément d'ordre 8 il est isomorphe à $\mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$.

1.4. Supposons que G ait un élément d'ordre 4, et pas d'élément d'ordre 8. Soit a un élément d'ordre 4. Soit $\bar{b} \in G/\langle a \rangle$ d'ordre 2. Montrer qu'il existe un élément $b \in G$ tel que $p(b) = \bar{b}$ et b est d'ordre 2. On choisira un élément $b \in G$ tel que $p(b) = \bar{b}$, puis on montrera que b est d'ordre 2 ou 4, si b est d'ordre 4 on montrera que $b + a$ est d'ordre 2. En utilisant 1.0 conclure que G est isomorphe à $\mathbf{Z}/\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$.

En déduire que $G \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$.

2.1. Groupe iédral : par définition

$$D_8 = \{1, \rho, \rho^2, \rho^3, s, s\rho, s\rho^2, s\rho^3\}$$

avec la relation $s\rho s = \rho^3$. Donner la table du groupe. Montrer que le centre est isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ et engendré par ρ^2 .

Montrer que le quotient par le centre est isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Déterminer les éléments d'ordre 2 et 4 (ρ, ρ^3).

Décrire les classes de conjugaisons : $\{1\}, \{\rho^2\}, \{\rho, \rho^3\}, \{s, s\rho^2\}, \{s\rho, s\rho^3\}$

Déterminer les sous-groupes. Lesquels sont distingués?

Comparer au groupe du carré.

2.2. Groupe quaternionien : par définition

$$Q = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$$

On rappelle que $i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = k, jk = i, ki = j$ et $ij = -ji, jk = -kj, ki = -ik$. Donner la table du groupe. Montrer que le centre est isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ et engendré par -1 . Montrer que le quotient par le centre est isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

Déterminer les éléments d'ordre 2 et 4 $(i, -i, j, -j, k, -k)$.

Décrire les classes de conjugaisons : $\{1\}, \{1\}\{i, -i\}, \{j, -j\}, \{k, -k\}$

Déterminer les sous-groupes. Lesquels sont distingués?