L3 Mathématiques

Epreuve du 3 Février 2006

Les téléphones portables et les calculettes sont interdits

Les exercices ne sont pas classés par ordre de difficulté croissante, si p désigne un nombre premier on rappelle que $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ et $\mathbf{F}_p$ désignent le même objet.

1.1. Décrire toutes les classes de conjugaison des groupes symétriques $\mathcal{S}_4$ et $\mathcal{S}_5$. On donnera le nombre d'éléments de chacune de ces classes. (Remarque : la description des classes de conjugaison est une question de cours on ne demande pas de faire la démonstration mais seulement d'énoncer le résultat). Donner à chaque fois un exemple d'élément dans la classe.
1.2. Soit f un automorphisme de $\mathcal{S}_4$. Démontrer que l'image d'une classe de conjugaison de $\mathcal{S}_4$ par f est une classe de conjugaison de $\mathcal{S}_4$. Montrer que l'image d'une transposition par f est une transposition. On pourra utiliser le fait que si x est d'ordre k, $f(x)$ est aussi d'ordre k.
1.3. Faire le même exercice pour $\mathcal{S}_5$.
Puis montrer que le groupe $\mathcal{S}_6$ contient une classe de conjugaison, dont les éléments sont d'ordre 2, qui est distincte de la classe des transpositions, et qui a autant d'éléments que cette dernière classe. (Cette sous-question est hors barème).

2.1. Donner la liste des polynômes irréductibles sur le corps $\mathbf{F}_3$ de degré inférieur ou égal à 2. Montrer que les polynômes $X^3 + 2X^2 + 1$, $X^3 + 2X^2 + X + 1$ sont irréductibles.
2.2. Montrer que l'anneau quotient $L = \mathbf{F}_3[X]/(X^3 + 2X^2 + 1)$ est un corps. Précisez son nombre d'éléments. Soit $R \in \mathbf{F}_3[X]$ quelconque, montrer que si $a \in L$ est racine de R il en est de même de a^3.
Dans le corps L trouver les racines de $Q = X^3+2X^2+X+1$ (on pourra calculer $Q(X-1)$). Donner les valeurs possibles de l'ordre d'un élément dans le groupe multiplicatif des éléments non nuls (inversibles) de L. Puis chercher un générateur de ce groupe.

3. On admet dans la suite que l'anneau $\mathbf{Z}[i]$ des entiers de Gauss est euclidien donc principal.
Factoriser les entiers 3, 7, 11, 15, en éléments irréductibles (on utilisera des théorèmes du cours dans cette partie).

4. Quel est l'ordre de 3 dans le groupe des éléments inversibles de $\mathbf{Z}/16\mathbf{Z}$? Quel est l'ordre de 4 dans le groupe des éléments inversibles de $\mathbf{Z}/27\mathbf{Z}$?

5. Enoncer le petit théorème de Fermat.